Colegios

TRILCE

Geometría

3er Año

ÍNDICE

Geometría

TRILCE

UNIDAD 1

LA IMPORTANCIA DEL ESTUDIO DE LA GEOMETRÍA

Mucho antes de que se pusieran de moda las teorías sobre la construcción de las pirámides de Egipto que hablan de alienígenas o habitantes de la Atlántida, se pensaba que éstas eran obra de Dios. Los primeros cristianos y musulmanes creían que las pirámides eran refugios construídos para sobrevivir al Diluvio Universal. Ya en el siglo XIX, algunos descubrimientos sugirieron que la construcción de las pirámides estuvo influenciada por alguna entidad superior. Desde entonces, muchos han creído que las misteriosas conexiones numéricas encontradas en estas obras magnas forman parte de un gran plan. La más famosa de estas conexiones numéricas es la omnipresencia del misterioso número Pi en el monumento más grande jamás construído por el hombre en piedra, la pirámide de Keops.

APRENDIZAJES ESPERADOS

Comunicación matemática

- Identificar los tipos básicos de triángulos (isósceles y equilátero).
- Interpretar las fórmulas de los ángulos en el triángulo.

Resolución de problemas

- Analizar datos y propiedades que se emplean en los triángulos.
- Formular estrategias para la resolución de ejercicios sobre generalidades del triángulo.

Generalidades de un triángulo

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar los tipos de triángulos básicos.
- Analizar y aplicar las propiedades asociadas al triángulo.

http://www.el-buskador.com/galeria/img-wallpappers-egipto-piramides-12083.htm

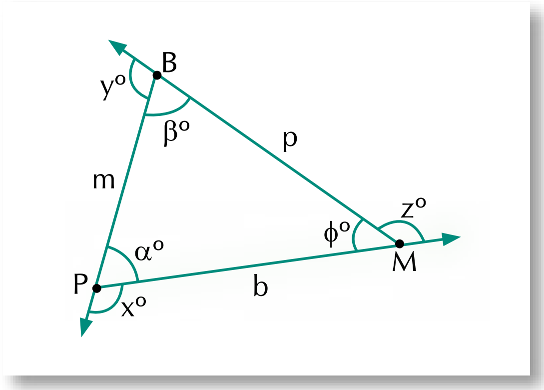
En el antiguo Egipto, la cuerda usada por los agrimensores estaba formada por 12 nudos equidistantes. Sabían que una cuerda con 12 nudos regularmente separados sirven para determinar un ángulo recto, tal que si se tensa la cuerda se forme un triángulo rectángulo de lados 3; 4 y 5 unidades. Este sistema era muy usado en sus construcciones. Con ella medían ángulos rectos y superficies.

- ¿Cuál era el principal uso de la cuerda en Egipto?

Conceptos básicos

Es un polígono de tres lados, es decir, una porción del plano limitada por tres segmentos unidos dos a dos, por sus extremos. Los tres segmentos que limitan al triángulo se denominan lados y los extremos de los lados, vértices.

Triángulo



Propiedades

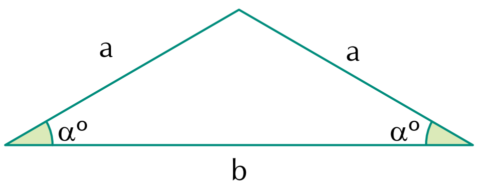
$\alpha° + \beta° + \phi° = 180°$ ... Suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

$x° + y° + z° = 360°$ ... Suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo

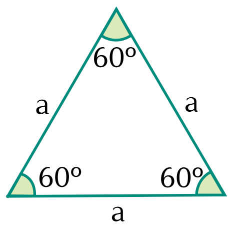
$\alpha° + \beta° = z°$
$\alpha° + \phi° = y°$
$\beta° + \phi° = x°$ ... Suma de las medidas de dos ángulos internos es igual a un ángulo externo

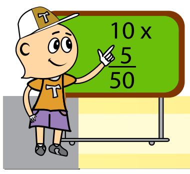
Triángulos básicos

Triángulo isósceles



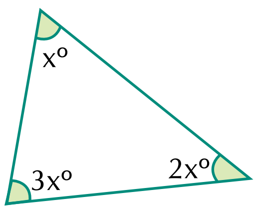
Triángulo equilátero



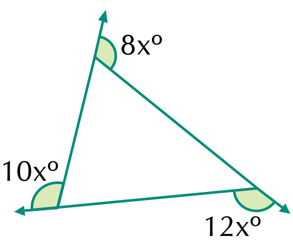


Aplica lo comprendido

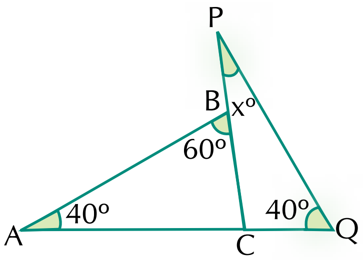
1. Del gráfico mostrado, calcule "x"



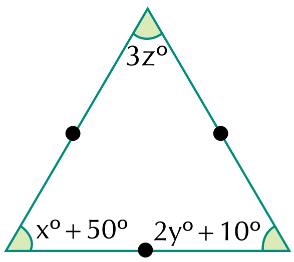
2. Del gráfico mostrado, calcule "x"



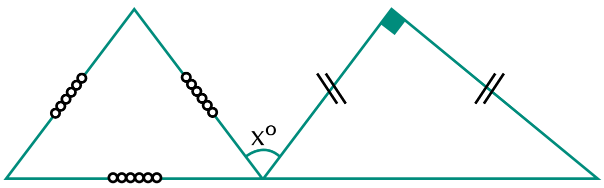
3. Calcule "x"



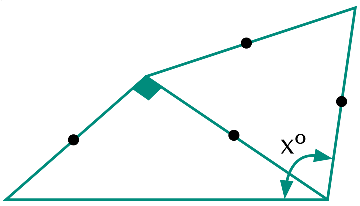
4. Calcule "x + y + z" en el gráfico



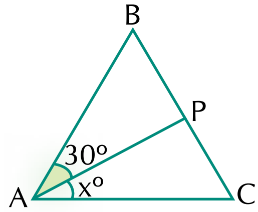
5. En el gráfico, calcule "x"



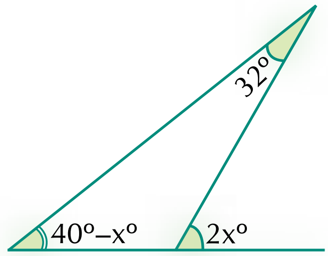
6. Calcular "x"



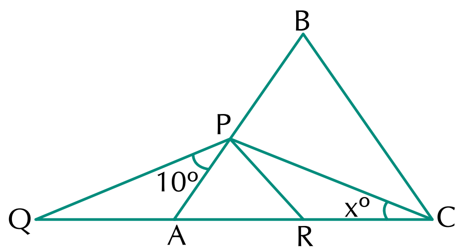
7. Calcule "x", si: AB = BC y AP = AC



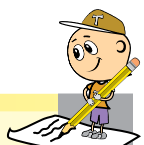
8. Calcule "x"



9. Si el triángulo ABC es equilátero, calcule "x", sabiendo que : PQ = PC



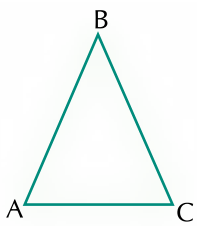
10. En un triángulo ABC, se cumple: m∢A = 2m∢C = 80°. Calcule la m∢B.



Aprende más...

Comunicación matemática

1. Indicar si es verdadero (V) o falso (F) el siguiente enunciado, según el gráfico:

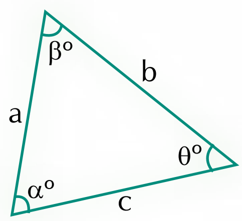


Si: AB = BC

→ m∢A = m∢C..( )

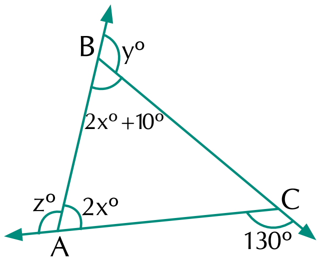
→ m∢B > m∢C ....( )

2. Indicar si es verdadero (V) o falso (F) el siguiente enunciado, según el gráfico:



Si: α° = β° = θ° → a = b = c...........................( )

3. Indicar si es verdadero (V) o falso (F) el siguiente enunciado, según el gráfico:



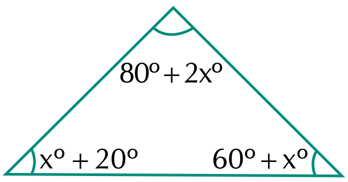
$m\sphericalangle z > m\sphericalangle C$...( )

$m\sphericalangle y > m\sphericalangle C$...( )

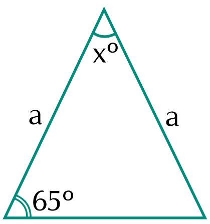
$m\sphericalangle z > m\sphericalangle y$...( )

Resolución de problemas

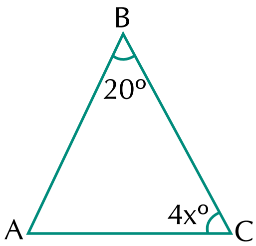
4. Calcule "x"



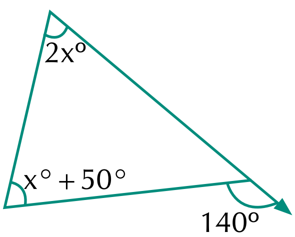
5. Calcule "x"



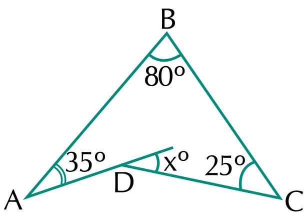
6. Si: AB = BC, calcule "x"



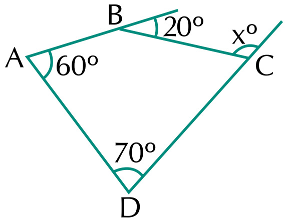
7. Calcule "x"



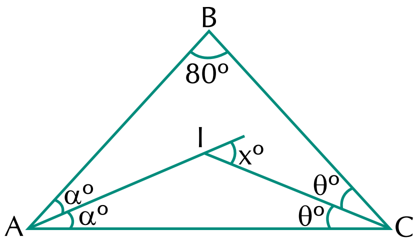
8. Calcule "x"



9. Calcule "x"

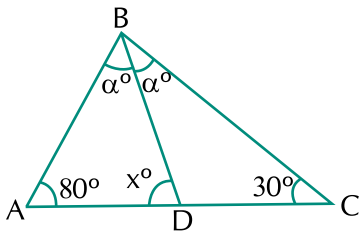


10. Calcule "x"

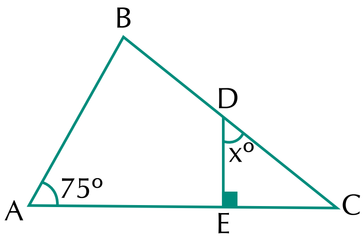


11. En un triángulo ABC, se traza $\overline{BP}$ ("P" está en $\overline{AC}$) de manera que: AB = BP = PC. Calcule la $m\sphericalangle ABP$, si: $m\sphericalangle BCA = 40°$

12. Calcule "x", si: AC = BC

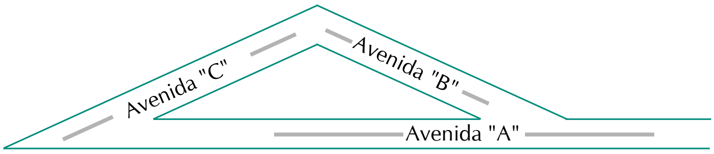


13. Calcule "x", si: AC = BC

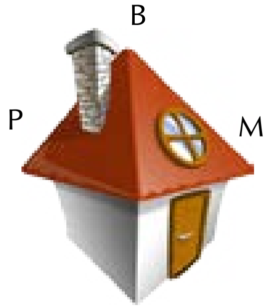


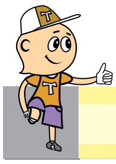
Aplicación cotidiana

14. En el parque de nombre "el triángulo", se ubican tres avenidas de tal manera que cada una forme el mismo ángulo con otra avenida. ¿Cuál es el ángulo entre la avenida "A" y la avenida "C"?



15. El techo de una casa tiene la forma del gráfico. Si se quiere construir con un ángulo de 120° en la parte superior, ¿cuál debe ser la m∢BPM y la m∢BMP?

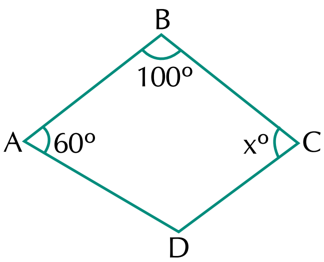




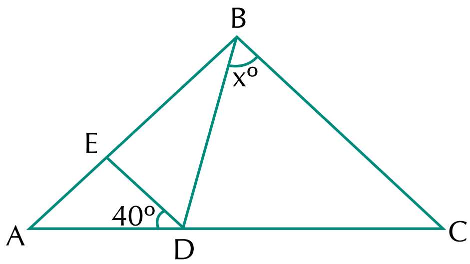
¡Tú puedes!

1. En un triángulo ABC, se traza $\overline{BP}$ ("P" está en $\overline{AC}$) de tal manera que: BP = PC. Calcule la medida del ángulo ABC, sabiendo además que: m∢ABP – m∢BAC = 40°.

2. Del gráfico mostrado: AB = BC = AD, calcule "x"



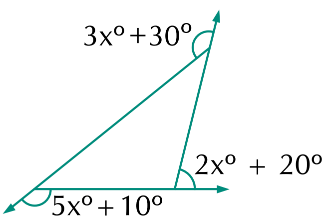
3. Del gráfico mostrado: AB = BC y BE = BD, calcule "x".



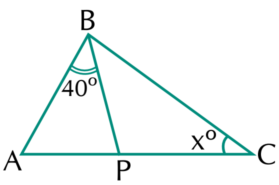
4. En un triángulo ABC (AB = BC) se ubica el punto "D" en $\overline{AB}$, tal que: CD = AC. Calcule la m∢CBA, si: m∢DCA = 40°.

Practica en casa

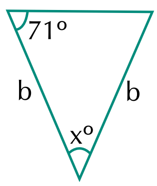
1. Calcule "x"



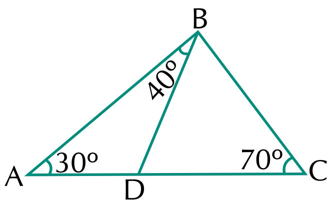
2. Calcule "x", si: AB = BP = PC



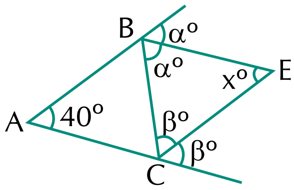
3. Calcule "x"



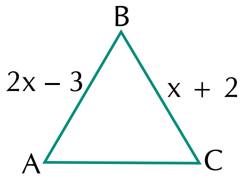
4. Si: BD = 10u, calcule "BC"



5. Calcule "x"

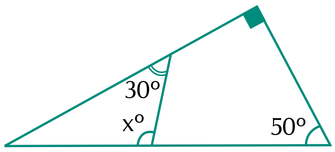


6. Calcule el perímetro del triángulo ABC, si es equilátero



7. En un triángulo isósceles ABC, se sabe que: $m\measuredangle A = 100°$, calcule la $m\measuredangle C$.

8. Calcule "x"



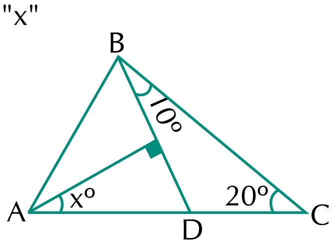
9. En un triángulo isósceles ABC $(AB = BC)$ se ubica el punto "P" en $\overline{BC}$, tal que: $AP = AC$. Si: $m\measuredangle B = 30°$, calcule la $m\measuredangle PAC$.

10. En un triángulo ABC se traza $\overline{BM}$ ("M" en $\overline{AC}$), tal que: $AM = MB = MC$. Calcule la $m\measuredangle ABC$.

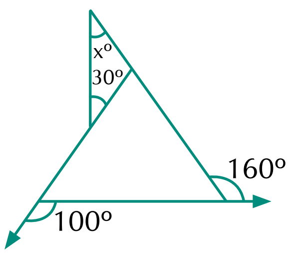
11. En un triángulo ABC, se ubica el punto "D" en $\overline{AC}$, tal que: $AD = DB$ y $DC = BC$. Si $m\measuredangle A = 25°$, calcule la $m\measuredangle C$.

12. Se tiene un triángulo isósceles ABC donde $AB = BC$, en el cual se traza una ceviana $\overline{CP}$. Sobre $\overline{CP}$ se ubica el punto "Q", tal que: $BP = BQ$ y la $m\measuredangle QBC = 36°$. Calcule: $m\measuredangle ACP$.

13. Calcule "x"

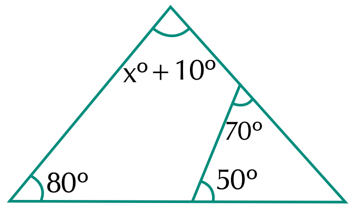


14. Calcule "x°"

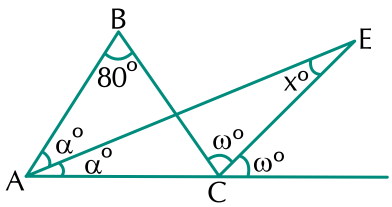


15. En un triángulo ABC se traza la bisectriz exterior $\overline{BF}$ ("F" pertenece a la prolongación de $\overline{AC}$) y luego en $\overline{AB}$ se ubica el punto "E", de modo que: $AE = EC$ y $m\measuredangle AFB = 20°$. Calcule la $m\measuredangle ECB$.

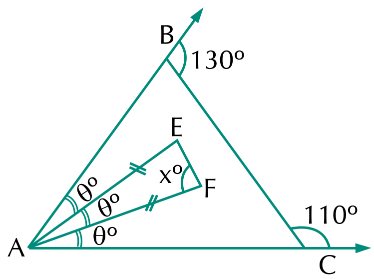
16. Calcule "x"



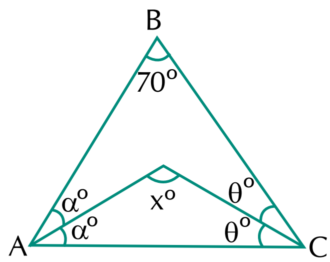
17. Calcule "x"



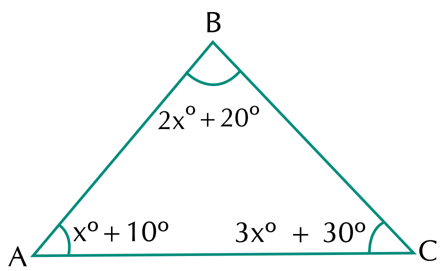
18. Calcular "x°"



19. Calcule "x"



20. Calcule "x"



Recta, rayo, semirecta y

En este capítulo aprenderemos:

- A conocer la diferencia entre línea, línea recta, rayo, semirecta y segmentos.
- A identificar y aplicar las propiedades de la línea, de la recta, el rayo y los segmentos.
- Analizar los datos disponibles para resolver los ejercicios.

En casi 50 kilómetros de longitud y 15 kilómetros de ancho, están ubicados los dibujos y figuras conocidas como las "líneas de Nazca", consideradas por la UNESCO como Patrimonio Cultural de la Humanidad. Las líneas abarcan hasta cuatro pampas: Palpa, Ingenio, Nazca y Socos, localizadas entre los kilómetros 419 y 465 de la carretera Panamericana Sur.
El suelo de esta región, una de las más secas del mundo, es de color marrón -según María Reiche- y bajo una primera capa se encuentra otra de color amarillo. Esa es la razón porque una pisada deja una perdurable mancha blanca, que se fijará para siempre. Las figuras se hallan en un desierto, donde el suelo no es solo arena sino que está cubierto de piedras de color verdusco. Sus enormes dimensiones y la exactitud de su hechura sugieren ser comparadas por los expertos con las pirámides de Egipto.
Es el lugar un gran tablero de dibujo, con líneas rectas anchas y angostas de diversas longitudes, atravesado por grandes cuadriláteros como si fuera una gran red. Pero su complejidad de líneas solo puede ser apreciada desde el aire a una altura de 1 500 pies. Recién desde allí pueden verse con claridad unos hermosos diseños, que en su mayoría representan grandes figuras de animales.

- ¿Cómo están formadas las líneas de Nazca?

Conceptos básicos

Una línea es una sucesión continua ilímitada de puntos

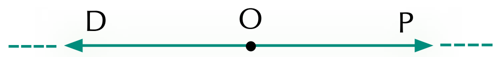
Línea recta

Es un conjunto infinito de puntos que tienen una misma dirección.

Línea recta DP : $\overleftrightarrow{DP}$

Rayo

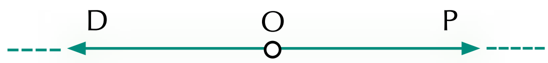
Es cada una de las porciones determinadas en una recta por un punto, incluyéndolo a este.



O: origen; Rayo OD: $\overrightarrow{OD}$; Rayo OP: $\overrightarrow{OP}$

Semirecta

Es cada una de las porciones determinadas en una recta por un punto, sin incluir a este.



Semirecta OD: $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{OD}$; semirecta OP: $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{OP}$

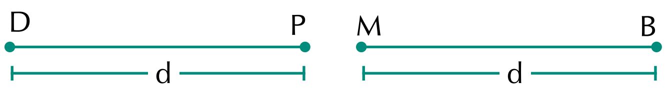
Segmento de recta

Es una porción de la línea recta comprendida entre dos puntos fijos, denominados extremos.

Segmento de recta DP: $\overline{DP}$
Longitud del segmento DP: d
d: número real positivo [$\mathbb{R}^+$]

Segmentos congruentes

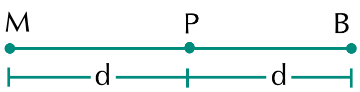
Dos segmentos son congruentes, si tienen la misma longitud.



$\overline{DP} \cong \overline{MB}$

Punto medio de un segmento

Es aquel punto del segmento que lo divide en dos segmentos de igual longitud.



$\overline{MP} \cong \overline{PB}$, "P": punto medio de $\overline{MB}$

Operaciones con segmentos

Adición: PK + KF + FG = PG
Sustracción: PG – PK = KG

Aplica lo comprendido

1. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "P", "Q", "R" y "S", tal que "R" es punto medio de $\overline{PS}$. Si: PQ = 18u y QS = 22u, calcule "QR".

2. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "T", "N", "S" y "R", tal que: TN = NR, TS = 20u y TR = 38u. Calcule "NS".

3. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "P", "Q", "R" y "S", tal que: PR = 32u, RS = 12u y QS = 30u. Calcule "PQ".

4. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos "M", "N", "S" y "T", siendo "N" punto medio de $\overline{MS}$. Calcule "NT", si: MS = 36u y ST = 16u.

5. Si: DT = 20u, EP = 22u y DP = 29u, calcule "ET", si "D", "E", "T" y "P" son cuatro puntos consecutivos en una recta.

6. Calcule "AN", si: AP = 6; PB = 4 y BN = 12

7. Calcule "AP", si: PB = 3 y AB = 10

8. Calcule "BD", si: AB = 3BC y AD + 3(CD) = 12

9. Si: PR = m y RT = n, calcule "PT"

10. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos "P", "Q", "R" y "S". Calcule "PS", si: PR = 20 y PS + RS = 80

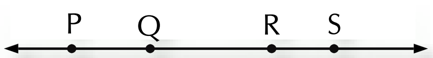
Aprende más...

Comunicación matemática

1. De las siguientes proposiciones, indicar si es verdadero (V) o falso (F).
   - Por un punto pasan infinitas rectas .... (   )
   - Toda figura geométrica está compuesta por puntos... (   )
   - Los elementos de la Geometría son el punto, la recta y el plano........................... (   )

Resolución de problemas

2. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "P", "Q", "R" y "S". Calcule "QR", si: PS = 30, PR = 20 y QS = 22.



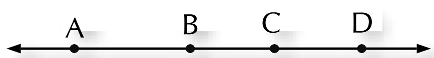
3. Si: FG = GH = HR = 3cm, calcule "FH + GR"

4. En una recta se ubican los puntos consecutivos "G", "R", "P" y "Q" de manera que: RP = PQ. Calcule "GR", siendo: PQ = 10 y GQ = 42.

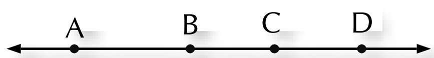
5. Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Calcule "AC", si: AC - BC = 2u y BD - CD = 1u.

6. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "K", "L", "M" y "N". Calcule "LM", si: KN = 18u, KM = 15u y LN = 12u.

7. Calcule "BC", si: AC = BD = 5u y AD = 7u.

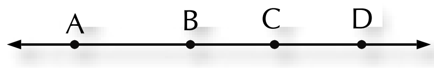


8. Calcule "AD", si: AC = 60u y AD + CD = 140u.

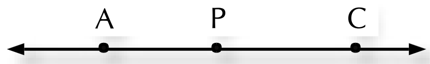


9. Si se sabe que: AB > BC, calcule "BC", siendo "M" punto medio de $\overline{AC}$ y MB = 10u, AB = 35u.

10. En una recta se tienen los puntos mostrados. Calcule "AB", si: AC = a, BD = $(\frac{3}{4}a)$ y CD = 3BC



11. Sobre una recta se ubican los puntos "A", "P", y "C". Calcule "AP.AC", si "P" es punto medio y PC = 3u.

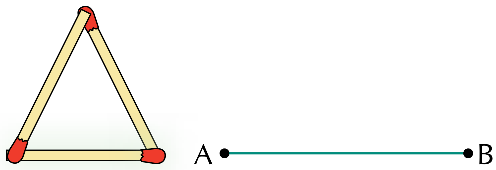


12. Se tienen los puntos consecutivos "P", "R", "B" y "C" ubicados sobre una línea recta. Calcule "PC", si: RB = 30u, PB = 40u y RC = 50u.

Aplicación cotidiana

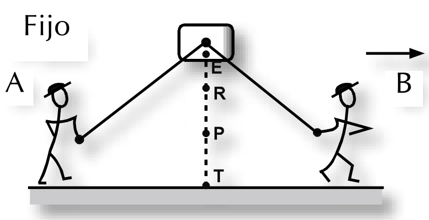
13. Con tres palitos de fósforo se forma la siguiente figura:

Calcule "AB", siendo el desarrollo de la figura y además cada palito mide 4 centímetros.



14. Un atleta para su salto toma 3 impulsos. En el primero 2 cm, en el segundo 2 cm más que el anterior y en el tercero 1 cm más que el anterior. Si las medallas se obtienen de la siguiente manera: 12 cm medalla de oro, 11 cm medalla de plata y 10 cm medalla de bronce, ¿qué medalla obtuvo el atleta?

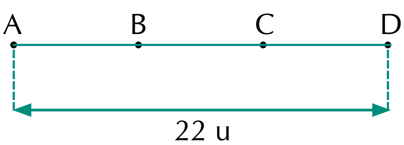
15. Determine la posición del bloque para la cual el hombre "B" se encontrará más alejado respecto de "A".



¡Tú puedes!

1. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D" tal que: CD = 7AC y BD - 7AB = 40 u. Calcule "BC".

2. Se tienen los puntos colineales "A", "B", "C" y "D", siendo "B" punto medio de $\overline{AC}$. Calcule "AB", si: 3BD = 4AC.



3. En una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B" y "C", en ese orden. Si: AC + AB = 18u, calcule "AM", siendo "M" punto medio de $\overline{BC}$.

4. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Si: AC + BD = 24 u, calcule "PQ", siendo "P" y "Q" puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente.

5. Sean los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D" en una recta, tal que: AB = BD = 3CD y AD = 12u. Calcule "CD".

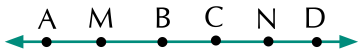
1. Calcule "AN", si: $AP=2u$, $PB=3u$ y $BN=7u$

2. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D", tal que:

$$\frac{AB}{3}=\frac{BC}{4}=\frac{CD}{5} \text{ y } AD=24u.$$

Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

3. Si "M" y "N" son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y $BC=4$ cm y $AD=10$ cm, calcule "MN".

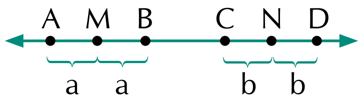


4. En una recta se tienen los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Calcule "AD", sabiendo que : $AC=4+CD$.

Además: $\frac{AB}{2}=\frac{BC}{3}=\frac{CD}{4}$

5. Si: $AB=CD=18$ cm y $BC=DE=16$ cm, calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$.

6. Si: $AC+BD=46$ cm, calcule "MN".



7. Si "M" es punto medio de $\overline{AE}$ y $AC-CE=32$ cm, calcule "MC".

8. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Si: $AC+BD=24$ u, calcule "PQ", siendo "P" y "Q" puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente.

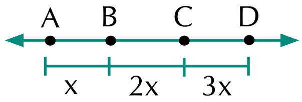
9. En una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D", de tal manera que: $AC=22$ u, $BD=25$ u y $AD=33$ u. Calcule "BC".

10. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Calcule "AB", sabiendo que: $AC=14$ u, $BD=18$ u y $CD=2AB$.

11. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D".

Calcule "AC", si: $\frac{AB}{2}=\frac{BC}{3}=\frac{CD}{5}$ y $AD=40$ u

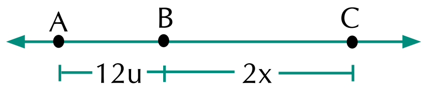
12. Del gráfico mostrado: $AD=48$ u, calcule "BC".



13. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D", de modo que: $AB=6u$, $BC=8u$ y $CD=10$ u. Luego se ubica "M" punto medio de $\overline{AB}$ y "N" punto medio de $\overline{CD}$. Calcule "MN".

14. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Calcule "AD", si: $AC=10$ u y $AD+CD=30$ u.

15. Según el gráfico: $AC=26$ u, calcule "x"



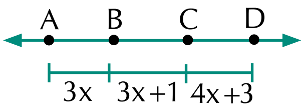
16. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B" y "P" de modo que: $AB>BP$. ¿En qué segmento se encuentra el punto medio de $\overline{AP}$? Graficar.

17. Si: $PR=a$ y $RT=b$, calcule "PT" en términos de "a" y "b".

18. Calcule "AP", si: $PB=6$ u y $AB=20$ u

19. Del gráfico, "M" es punto medio de $\overline{BC}$. Si: $AM=9u$ y $MC=2u$, calcule "AB".

20. Si: $AD=44$, calcule "x"



Ángulos

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar los tipos de ángulos según su medida y su posición.
- A reconocer y aplicar las propiedades que cumplen los ángulos.
- A formular estrategias para resolver ejercicios sobre ángulos.

La piedra de los doce ángulos

Al parecer, no todos conocen cuán mítica y especial resulta esta piedra. Muchas empresas la utilizan como logotipo, tal vez porque en la misma ciudad de Cusco es uno de los principales símbolos después del Machu Picchu y de su bandera. No creo equivocarme al decir que incluso está al mismo nivel que ambos.

La piedra de los doce ángulos, es en efecto eso mismo... una piedra incrustada en un mural inca, tallada de tal manera que posee doce ángulos que le facilitan calzar con exactitud con las demás piedras colindantes que forman el muro.

Es por eso que además de ser un elemento histórico muy especial, representa la tecnología incaica y el grado de presición en la manufactura de sus murallas.

Existe una polémica reciente que aprovecho para esclarecer: hace poco un par de personas fueron detenidas por dañar este mural (específicamente esta piedra) y rayarla con spray. He escuchado durante mi viaje, comentarios de gente que piensa que el detenerlos ha sido un castigo muy duro; así como comentarios de sus mismos compatriotas (chilenos) que piensan que está bien.

Lo cierto que muy al margen de su nacionalidad fueron personas que intencionadamente hicieron un daño con alevosía y ventaja, con conocimiento del significado vandálico de su acción así como de las consecuencias que comprometía.

Tal vez por desconocimiento de la trascendencia histórica de este monumento es que se ha levantado el bando que dice que la justicia ha sido abusiva ya que piensan que simplemente han rayado una pared cualquiera .

La piedra de los doce ángulos tiene un significado tan grande como la piedra roseta, la tumba de Tutankamon, la Estatua de la Libertad, o la Torre Eiffel... y es por eso que su ubicación corresponde a una de las calles más transitadas de Cusco por turistas que anhelan tomarse una fotografía al lado de ella.

- ¿Cuál cree Ud. que sería la mejor definición del ángulo?

Conceptos básicos

Ángulo

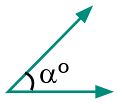
Es aquella figura geométrica formada por la unión de dos rayos que tienen el mismo origen y que no están en línea recta.

Clasificación

Según sus medidas

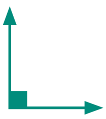
Ángulos convexos

Ángulo agudo

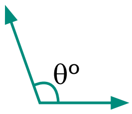


$0° < \alpha° < 90°$

Ángulo recto

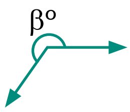


Ángulo obtuso



$90° < \theta° < 180°$

Ángulo no convexo

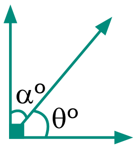


$180° < \beta° < 360°$

Según la posición de sus lados

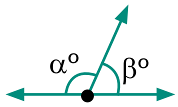
Ángulos adyacentes

Complementarios



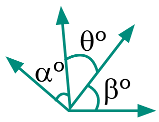
$\alpha° + \theta° = 90°$

Suplementarios

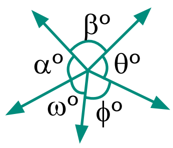


$\alpha° + \beta° = 180°$

Ángulos consecutivos

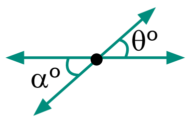


Ángulos coplanares



$\alpha° + \beta° + \theta° + \phi° + \omega° = 360°$

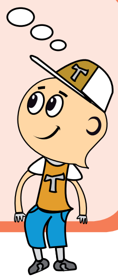
Ángulos opuestos por el vértice

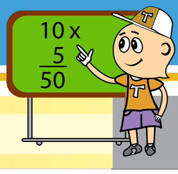


$\alpha° = \theta°$

Recuerda que...

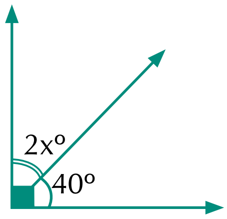
Los ángulos están formados por dos rayos que no estén en línea recta.



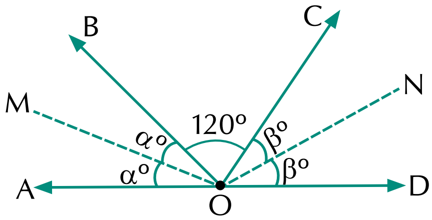


Aplica lo comprendido

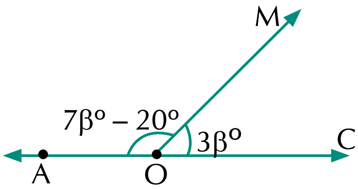
1. Calcule "x"



2. Del gráfico, calcule: m∢MON



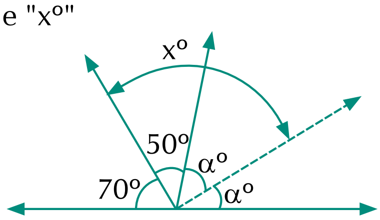
3. Calcule "β"



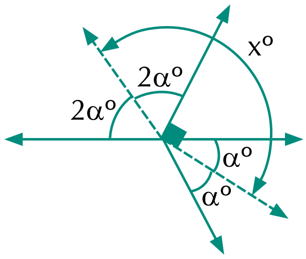
4. La suma del complemento más el suplemento de cierto ángulo es igual a 130°. Calcule la medida de dicho ángulo.

5. Calcule la medida de un ángulo, sabiendo que su suplemento es igual al triple de su complemento.

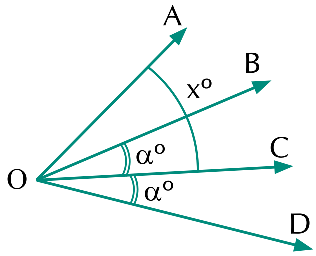
6. Calcule "x°"



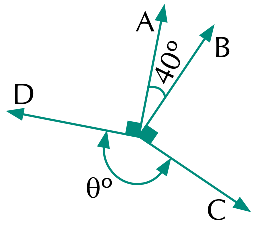
7. Calcule "x°"



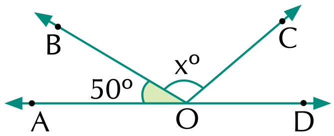
8. Calcule la m∢AOC, si $\overrightarrow{OC}$ es bisectriz del ∢BOD. Además los ángulos AOB y AOD son complementarios.

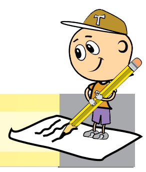


9. Calcule "θ"



10. Calcule "x", si: m∢AOC + m∢BOD = 260°

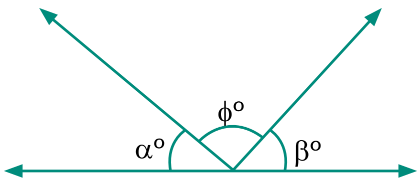




Aprende más...

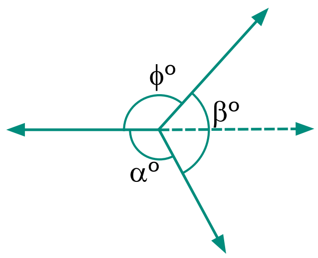
Comunicación matemática

1. Indicar si es verdadero (V) o falso (F) el siguiente enunciado:



- $\alpha° + \beta° + \phi° = 180°$ ....( )
- $\beta° + \phi° = 120°$ ....( )

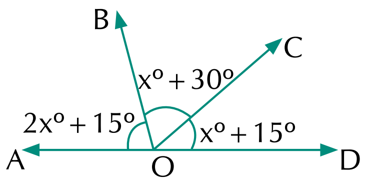
2. Si: $\alpha^o = \beta^o = \phi^o$



- $\alpha^o + \beta^o + \phi^o = 180^o$ ....( )
- $\beta^o = 120^o$ ....( )

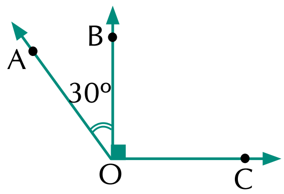
Resolución de problemas

3. Calcule "x"



4. Si la suma de dos ángulos es 125° y su diferencia es 25°, calcule el complemento del menor de ellos.

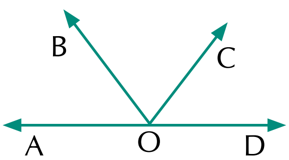
5. Calcule la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos AOC y BOC.



6. Se tienen los ángulos consecutivos : AOP, POQ y QOB. Si: $m\measuredangle AOB = 100^o$, $m\measuredangle AOQ = 56^o$ y $m\measuredangle POB = 74^o$, calcule la $m\measuredangle POQ$

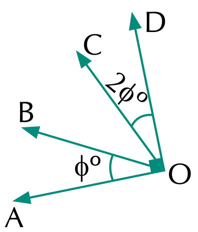
7. En el gráfico:

$$\frac{m\measuredangle AOB}{2} = \frac{m\measuredangle BOC}{3} = m\measuredangle COD$$

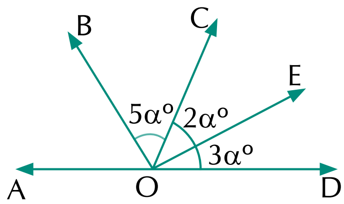


Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOC y BOD.

8. Calcule "ϕ", si $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz del ángulo AOC

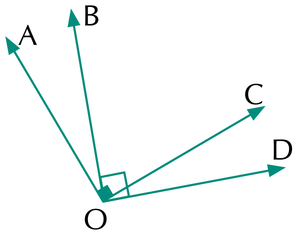


9. Calcule "α", si $\overrightarrow{OB}$ es bisectriz del ángulo AOC

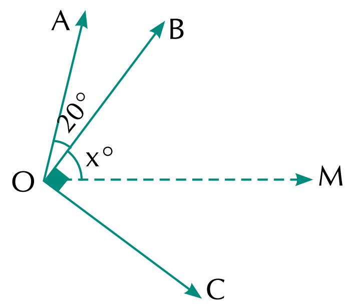


10. El complemento del complemento de "θ" es 32°. Calcule el suplemento del suplemento de "θ°".

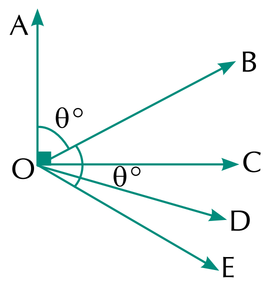
11. Calcule la medida del ángulo que forman las bisectrices de los ángulos AOB y COD.



12. Si $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo AOC, calcule "x"

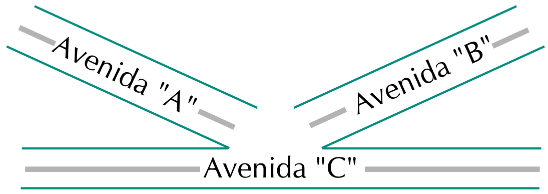


13. Del gráfico, calcule: $m\measuredangle BOD$, si $\overrightarrow{OD}$ es bisectriz del ángulo COE.

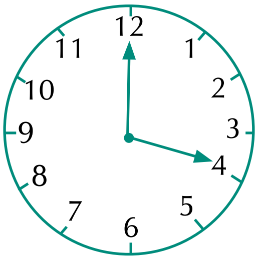


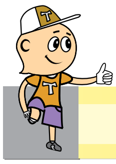
Aplicación cotidiana

14. El ángulo formado por la avenida "A" y la avenida "B" es de 90°. Calcule el complemento del ángulo formado por la avenida "B" y la avenida "C", si el ángulo formado por la avenida "C" y la avenida "A" es de 35°.



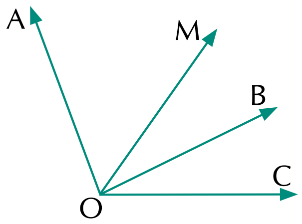
15. Si las agujas del reloj marcan las 4pm, ¿cuál es el ángulo que forman las agujas del reloj?





¡Tú puedes!

1. Si: m∢AOB - m∢BOC = 80°, calcule: m∢MOB, si además $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo AOC.



2. La diferencia de las medidas de dos ángulos consecutivos AOB y BOC es 60°. Calcule m∢DOB, si $\overrightarrow{OD}$ es bisectriz del ángulo AOC.

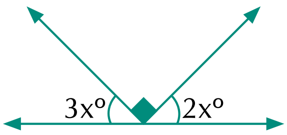
3. Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOC y se traza el rayo $\overrightarrow{OD}$ bisectriz del ángulo AOB. Calcule la m∢COD, si: m∢AOC + m∢BOC = 140°.

4. Dados los ángulos consecutivos AOB y BOC, se trazan las bisectrices $\overrightarrow{OM}$ de ∢AOB, $\overrightarrow{ON}$ de ∢BOC y $\overrightarrow{OZ}$ de ∢MON. Si: m∢AOB – m∢BOC = 52°, calcule la m∢BOZ.

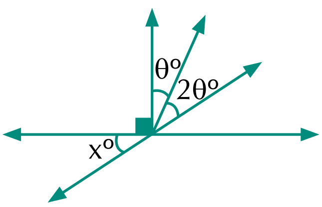
5. Sean los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD tales que $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ son las bisectrices de los ángulos AOC y BOD respectivamente. Si: m∢POQ = 31° y m∢BOC = 82°, calcule la m∢AOD.

Practica en casa

1. Calcule "x°"



2. Calcule "x°", si: θ = 18°

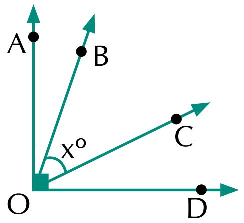


3. Sean los ángulos adyacentes AOB y BOC, tales que: m∢BOC = 4m∢AOB y la m∢AOC = 50°. Calcule la m∢BOC.

4. Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOC. Si los ángulos AOC y BOC son suplementarios y m∢AOB = 80°, calcule la m∢AOC.

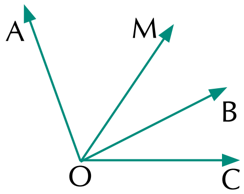
5. Se tienen tres ángulos consecutivos que forman un ángulo llano y las bisectrices del primer y tercer ángulo forman 140°. Calcule la medida del segundo ángulo.

6. Calcule "x", si: $m\measuredangle AOC + m\measuredangle BOD = 140^\circ$.

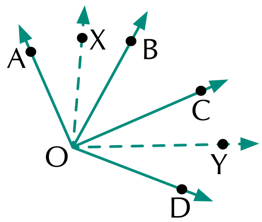


7. Los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD miden 25°; 45° y 75° respectivamente. Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOC y BOD.

8. Si: $m\measuredangle AOB - m\measuredangle BOC = 100^\circ$, calcule la $m\measuredangle MOB$, si además $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo AOC.



9. En el gráfico, $\overrightarrow{OX}$ es bisectriz del ángulo AOB y $\overrightarrow{OY}$ es bisectriz del ángulo COD. Calcule la $m\measuredangle AOC$, si: $m\measuredangle XOY = 90^\circ$ y $m\measuredangle BOD = 99^\circ$.

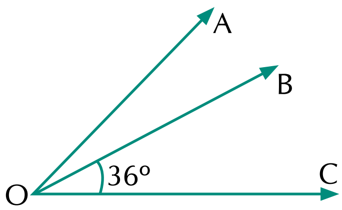


10. La diferencia de las medidas de dos ángulos consecutivos AOB y BOC es 60°. Calcule: $m\measuredangle DOB$, si $\overrightarrow{OD}$ es bisectriz del ángulo AOC.

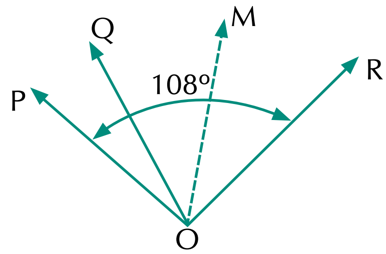
11. Se tienen dos ángulos consecutivos AOB y BOC. Si se traza $\overrightarrow{OD}$ bisectriz del ángulo AOB, calcule la $m\measuredangle COD$, si además: $m\measuredangle AOC + m\measuredangle BOC = 160^\circ$.

12. Se tienen dos ángulos adyacentes. Calcule la medida del ángulo que forman sus bisectrices, si la suma de las medidas de dichos ángulos es 40°.

13. Si: $m\measuredangle AOC = 4m\measuredangle AOB$, calcule la $m\measuredangle AOB$.

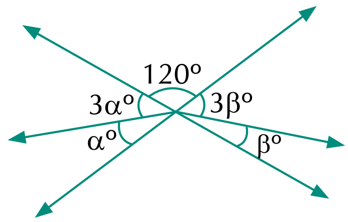


14. Si: $m\measuredangle ROQ = 2m\measuredangle POQ$ y $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo QOR, calcule la $m\measuredangle POM$.

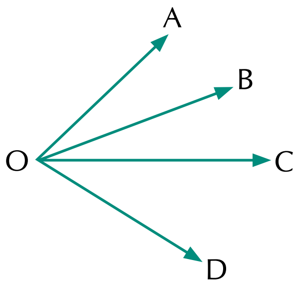


15. La diferencia de las medidas de dos ángulos adyacentes suplementarios es 60°. Calcule la medida del mayor ángulo.

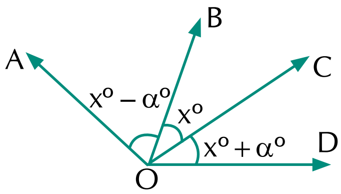
16. Calcule "$\alpha + \beta$".



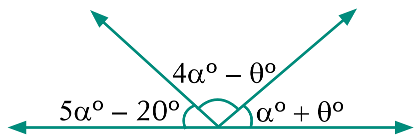
17. Si $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ son bisectrices de los ángulos AOC y AOD respectivamente, calcule la $m\measuredangle BOC$, si además: $m\measuredangle AOD = 60^\circ$.



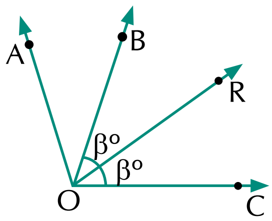
18. Calcule "x", si: $m\measuredangle AOD = 102^\circ$.



19. Calcule "α".



20. Del gráfico: $m\measuredangle AOB = 40^\circ$ y $m\measuredangle AOC = 110^\circ$, calcule: $m\measuredangle AOR$.



Complemento de segmentos y ángulos

En este capítulo aprenderemos:

- A relacionar y aplicar las propiedades de los segmentos y ángulos.

Podemos decir que la construcción con regla y compás consiste en la determinación de puntos, rectas (o segmentos de ellas) y circunferencia (o arcos de las mismas) a partir de una regla y un compás ideales. ¿Qué queremos decir con ideales? Muy sencillo:

La regla tiene longitud infinita, no tiene marcas que permitan medir o trasladar distancias y tiene solo un borde. Puede usarse solamente para trazar un segmento de recta entre dos puntos ya dados o para prolongar un segmento dado, todo lo que queramos.

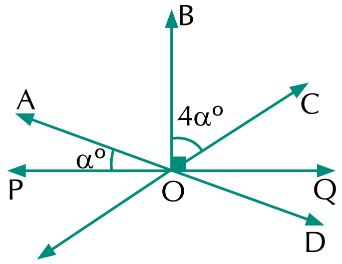
El compás se cierra cuando lo levantamos del papel. Es decir, después de utilizarlo olvida la distancia que tenía entre sus puntas. Puede usarse solamente para trazar circunferencias (o arcos de ellas) tomando como centro un punto ya dado y como radio la distancia entre ese punto y otro también dado de antemano.

En principio puede parecer que las normas que hemos impuesto para nuestras herramientas de trabajo son demasiado restrictivas, que podremos hacer poco con ellas, pero en realidad no es así. Estos instrumentos con estas características dan muchísimo juego, como podremos comprobar.

- ¿Cuáles son las características principales de la regla y el compás?

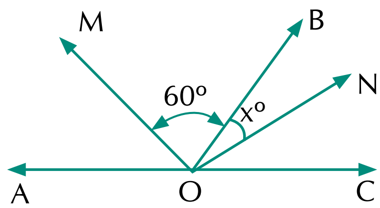
Aplica lo comprendido

1. Del gráfico mostrado, $\overrightarrow{BO} \perp \overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{OQ}$ es bisectriz del ángulo COD, calcule "α"

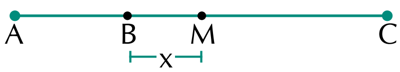


2. Dos ángulos adyacentes complementarios se diferencian en 50º. Calcule la medida del mayor de ellos.

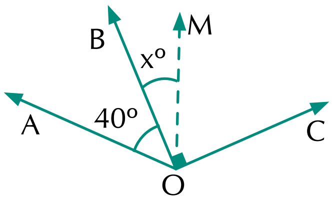
3. Del gráfico, $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo AON y $\overrightarrow{ON}$ es bisectriz del ángulo BOC, calcule "x"



4. Del gráfico mostrado, "M" es punto medio de $\overline{AC}$ y BC - AB = 18. Calcule "x"



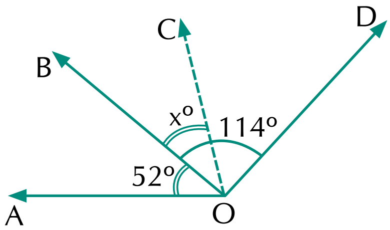
5. Si $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo AOC, calcule "x".



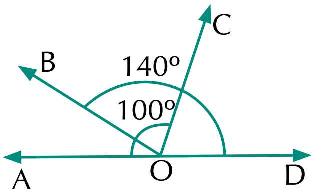
6. Si: AB = 8 u; BC = 16 u, "M" es punto medio de $\overline{AC}$ y "N" es punto medio de $\overline{AB}$, calcule "MN"

7. Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOC, siendo la m∢AOB = 7m∢BOC. Calcule la medida del ángulo AOC, si $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo AOC y la m∢MOB = 60º.

8. Si $\overrightarrow{OC}$ es bisectriz del ángulo AOD, calcule "x"



9. Calcule la medida del ángulo BOC, si: m∢AOC = 100º y m∢BOD = 140º

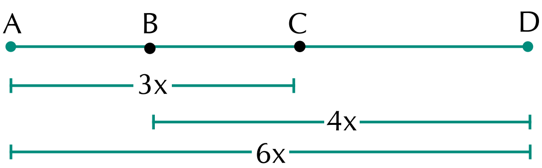


10. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "M", "A" y "B", siendo "O" punto medio de $\overline{AB}$. Calcule "MO", sabiendo que: MA = 13 cm y AB = 20 cm.

Aprende más...

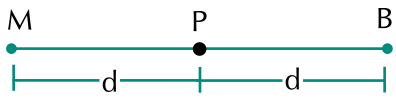
Comunicación matemática

1. Indicar según como corresponda, si es verdadero (V) o falso (F).



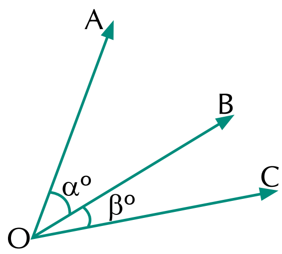
- BC = x .... ( )
- CD = 3x .... ( )

2. Indicar según como corresponda, si es verdadero (V) o falso (F):



- PM = PB ⇒ "M" es punto medio ....( )
- Si: MB = 2d y PB = d ⇒ PM = d ....( )

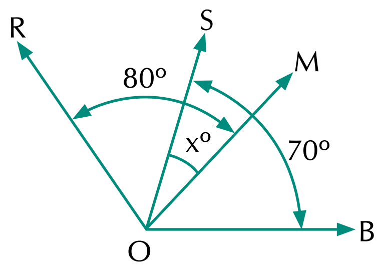
3. Indicar según como corresponda, si es verdadero (V) o falso (F):



Si: m∢AOB > m∢BOC:

- αº > βº...( )
- La bisectriz del ángulo AOC pertenece al ángulo AOB.......................( )

4. Indicar según como corresponda, si es verdadero (V) o falso (F):

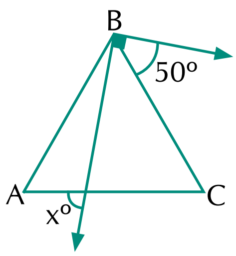


Si: m∢ROB = 120°:

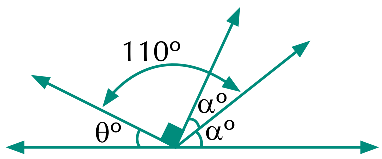
- x = 30° ....( )
- m∢ROS > m∢MOB ....( )

Resolución de problemas

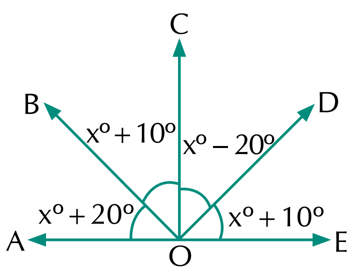
5. Si el triángulo ABC es equilátero, calcule "x".



6. Calcule "θ"



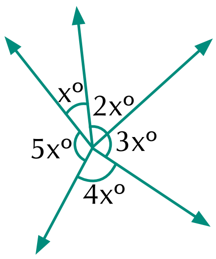
7. Calcule la m∢AOC



8. Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D", tal que: $\frac{AB}{4} = \frac{BC}{5} = \frac{CD}{3}$ y AD = 240m. Calcule "BC".

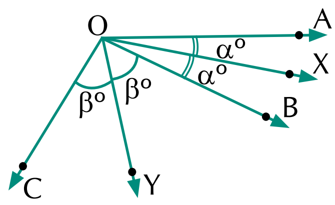
9. En una línea recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D", tal que: AC = 8u y BD = 10u. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

10. Calcule "x"



11. En una línea recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Si: AB = 12 u, BC = 8 u y CD = 2AB - CD, calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

12. Si: m∢AOB = 30° y m∢BOC = 120°, calcule la m∢XOY.

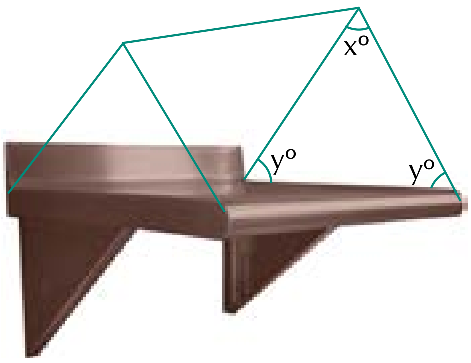


13. Sobre una recta se ubican los puntos "A", "B" y "C" consecutivos, tal que: AC - AB = 10 u. Luego se ubica el punto medio "M" de $\overline{BC}$. Calcule "BM".

14. El suplemento de un ángulo es el triple de su complemento. Calcule la medida del ángulo.

Aplicación cotidiana

15. Se quiere colocar una repisa colgada del techo. Si el ángulo "y°" mide 65°, ¿cuál es la medida que tiene que tener el ángulo "x°"?



¡Tú puedes!

1. Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D", tal que: AC = 19 u y BD = 23 u. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

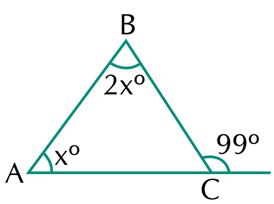
2. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Si se cumple que: AB = 3m; AC = 5m y 4AB - BD - 2CD = 4 m, calcule "AD".

3. En una recta se tienen los puntos consecutivos "M", "A", "O" y "B", siendo "O" punto medio de $\overline{AB}$. Calcule "MO", sabiendo que: (MA)(MB) = 32m^2 y AB = 4m.

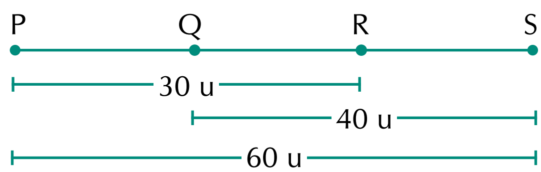
4. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos "P", "Q", "R" y "S". Calcule "PR", sabiendo que: QR = RS y $(PS)^2 - (PQ)^2 = 12QS$.

Practica en casa

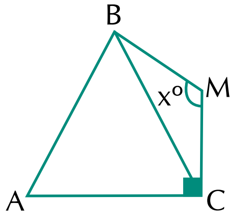
1. Calcule la m∢ABC



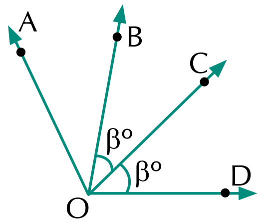
2. En el gráfico, calcule "QR"



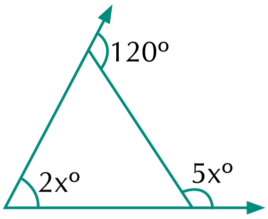
3. Si el triángulo ABC es equilátero y BM = MC, calcule "x".



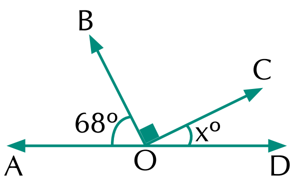
4. Si la m∢AOB = 40° y m∢AOD = 110°, calcule la m∢AOC.



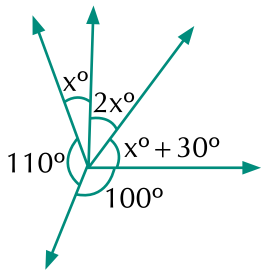
5. Del gráfico mostrado, calcule "x"



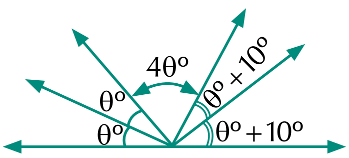
6. Calcule "x".



7. Calcule "x"

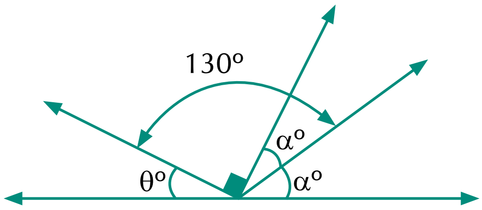


8. Calcule "θ"

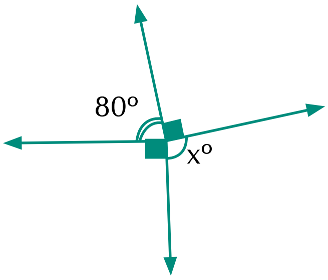


9. Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D", tal que: $\frac{AB}{4} = \frac{BC}{5} = \frac{CD}{3}$ y AD = 180 m. Calcule "BC".

10. Calcule "θ"



11. Calcular "x°"



12. Sean los ángulos adyacentes AOB y BOC tales que: m∢BOC = 4m∢AOB y la m∢AOC = 50°. Calcule: m∢AOB.

13. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD de modo que: m∢AOC = m∢COD. Calcule la m∢BOC, si: m∢BOD – m∢AOB = 48°.

14. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Calcule "AD", si: AC = 10u y AD + CD = 50 u.

15. El suplemento de un ángulo es el triple de su complemento. Calcule el suplemento del ángulo.

16. En una línea recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "M" y "C", siendo "M" punto medio de $\overline{AC}$, además: BC – AB = 18 u. Calcule "BM".

17. Sobre una recta se ubican los puntos "A", "B" y "C" consecutivos, tal que: AC - AB = 40 u y luego se ubica el punto medio "M" de $\overline{BC}$. Calcule "BM".

18. En una línea recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D", tal que: AC = 12 u y BD = 20 u. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

19. En una línea recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Si: AB = 20 u, BC = 6 u y CD = 2AB - CD, calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

20. En un triángulo equilátero ABC, levante por "C" una perpendicular al lado $\overline{AC}$ tal como $\overline{CF}$, de modo que: AC = FC. Calcule la medida del ángulo BAF.

UNIDAD 2

LA IMPORTANCIA DE LOS TRIÁNGULOS

Las pirámides mayas responden a distintas exigencias. La diferencia principal entre una pirámide maya y una egipcia está en que la primera, igual que el zigurat babilónico, tiene como función principal soportar un templo, lo que no ocurría con las construcciones faraónicas. El edificio maya es ante todo un monumental zócalo sobre el cual se alza el sanctasanctórum, el lugar del culto consagrado a las divinidades. A este respecto, las pirámides de Tikal ensalzan de manera especialmente evidente la unión entre la tierra y el cielo: hay una formidable "escalera" que permite a los sacerdotes ascender a lo más alto y comunicarse con los dioses del cosmos. En cambio, en la base, como ocurre con las pirámides de Egipto, se encuentra a menudo una tumba que puede ser subterránea o estar horadada dentro de la mole de la construcción. Allí descansaban los restos mortales del soberano divinizado. Esta función, definitivamente reconocida tras el descubrimiento de la famosa cripta del Templo de las Inscripciones de Palenque en 1952, que contenía el sarcófago de Pacal, confiere al edificio maya su doble significado, funerario y religioso.

APRENDIZAJES ESPERADOS

- Identificar los tipos de ángulos existentes entre dos rectas paralelas cortadas por una secante.
- Reconocer y relacionar otros sistemas de medidas angulares.
- Definir correctamente al triángulo y las líneas notables asociadas a ella.

Ángulos entre dos rectas paralelas

En este capítulo aprenderemos:

- A definir dos rectas paralelas.
- A identificar los tipos de ángulos existentes entre dos rectas paralelas cortadas por una secante.
- A reconocer y aplicar las propiedades existentes entre dos rectas paralelas.

A mediados del siglo XX se difundió la errónea idea según la cual los trenes (y con ellos el ferrocarril) eran un sistema de transporte "obsoleto" que pronto sería reemplazado por el automóvil y por el avión. La refutación de tales ideas quedó de manifiesto en la primera crisis de la energía de los años 70: un tren tradicional puede transportar con mayor velocidad y seguridad así como con menos gastos energéticos a más gente que varios automóviles o que varios autobúses (el menor gasto energético se explica fácilmente: un tren con solo un sistema de tracción motriz puede transportar la carga de varios camiones o buses que utilizan —cada uno— tracciones por separado). En cuanto a la competencia con el tráfico aéreo la misma casi no existe si de cortas y medianas distancias (hasta aproximadamente 1000 km) se trata al haberse incrementado la velocidad de los trenes y al haberse congestionado peligrosamente el espacio aéreo (principalmente en Europa Occidental, Estados Unidos, Japón y sus adyacencias).

Conceptos básicos

Rectas paralelas

Se denomina así a dos rectas ubicadas en un mismo plano y que no se intersectan.

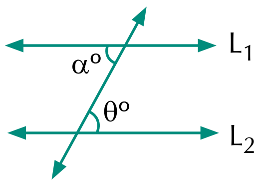
Notación: $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$

Se lee: La recta L_1 es paralela a la recta L_2.

Ángulos determinados por dos rectas paralelas $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ y una recta secante a ambas.

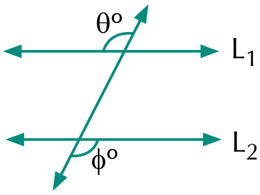
Ángulos alternos

Si: $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$



$\alpha° = \theta°$

"$\alpha°$" y "$\theta°$" son **ángulos alternos** internos pues sus medidas son iguales.

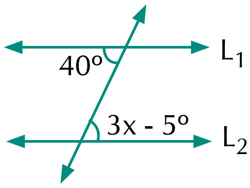


$\theta° = \phi°$

"$\theta°$" y "$\phi°$" son **ángulos alternos** externos pues sus medidas son iguales.

Ejemplos

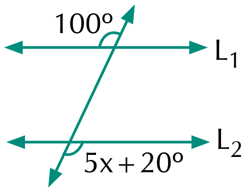
- Si: $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "x" en cada caso



Los ángulos son alternos internos, entonces:

$40° = 3x - 5°$

Desarrollando: $x = 15°$



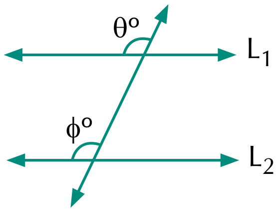
Los ángulos son alternos externos, entonces:

$100° = 5x + 20°$

Desarrollando: $x = 16°$

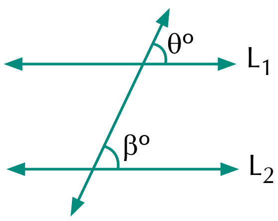
Ángulos correspondientes

Si: $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$



$\theta° = \phi°$

"$\theta°$" y "$\phi°$" son **ángulos correspondientes** pues son de igual medida.

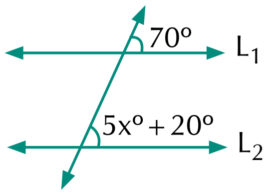


$\theta° = \beta°$

"$\theta°$" y "$\beta°$" son **ángulos correspondientes** pues son de igual medida.

Ejemplos

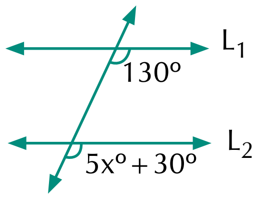
- Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "x" en cada caso.



Los ángulos son correspondientes, entonces:

$$70º = 5xº + 20º$$

Desarrollando: x = 10º



Los ángulos son correspondientes, entonces:

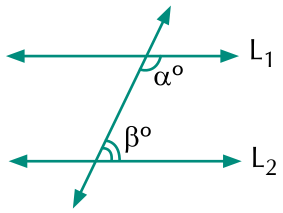
$$130º = 5xº + 30º$$

Desarrollando: x = 20º

Ángulos conjugados

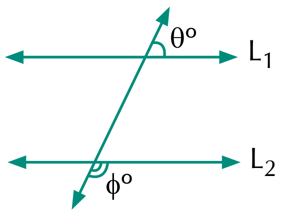
Sus medidas son suplementario

Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



$$\alpha^\circ + \beta^\circ = 180^\circ$$

"αº" y "βº" son ángulos **conjugados internos** pues suman 180º.

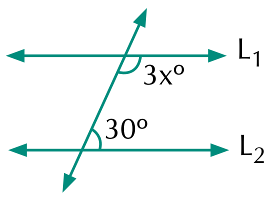


$$\theta^\circ + \phi^\circ = 180^\circ$$

"θº" y "φº" son ángulos **conjugados externos** pues suman 180º.

Ejemplos

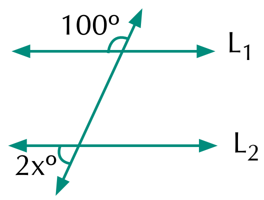
- Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "x" en cada caso.



Los ángulos son conjugados internos, entonces:

$$3xº + 30º = 180º$$

Desarrollando: x = 50º

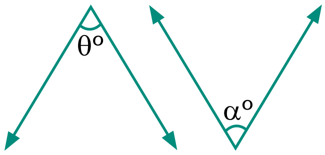


Los ángulos son conjugados externos, entonces:

$$100º + 2xº = 180º$$

Desarrollando: x = 40º

Ángulos complementarios
Son dos ángulos cuyas medidas suman 90º.



$\alpha^o + \theta^o = 90^o$

Complemento de un ángulo (C(x))
Es lo que le falta a un ángulo para medir 90º.

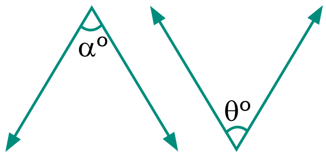
$C(x) = 90^o - x$

Ejemplos

$C(80^o) = 90^o - 80^o$ $\qquad$ $C(65^o) = 90^o - 65^o$

$C(80^o) = 10^o$ $\qquad$ $C(65^o) = 25^o$

Ángulos suplementarios
Son dos ángulos cuyas medidas suman 180º.



$\alpha^o + \theta^o = 180^o$

Suplemento de un ángulo (S(x))

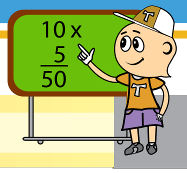
Es lo que le falta a un ángulo para medir 180º.

$S(x) = 180^o - x$

Ejemplos

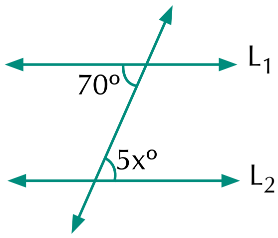
$S(80^o) = 180^o - 80^o$ $\qquad$ $S(179^o) = 180^o - 179^o$

$S(80^o) = 100^o$ $\qquad$ $S(179^o) = 1^o$



Aplica lo comprendido

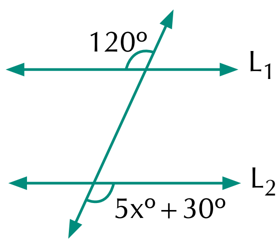
1. Del gráfico mostrado, calcule "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Los ángulos son:

Se puede plantear: x =

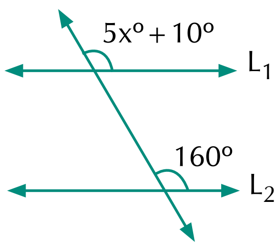
2. Del gráfico mostrado, calcule "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Los ángulos son:

Se puede plantear: x =

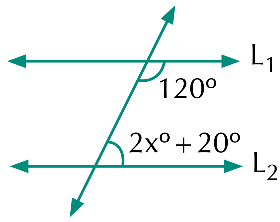
3. Del gráfico mostrado, calcule "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



Los ángulos son:

Se puede plantear: x =

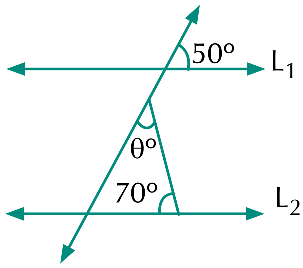
4. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "x"



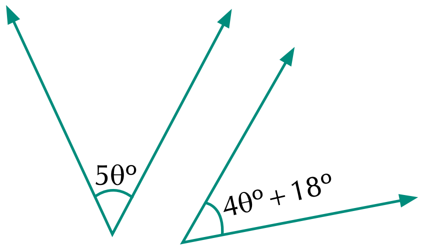
Los ángulos son:

Se puede plantear: x =

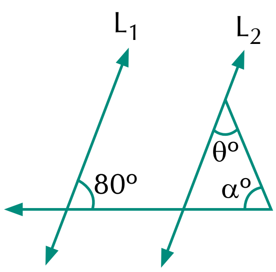
5. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "θ"



6. Si los ángulos mostrados son complementarios, calcule "θ".



7. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "θ + α"



8. En cada caso, calcule el complemento de los ángulos dados:

$C(80^\circ) =$ $\qquad$ $C(9^\circ) =$

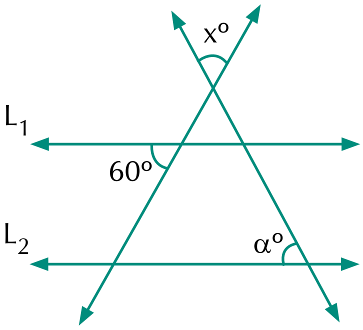
$C(70^\circ) =$ $\qquad$ $C(15^\circ) =$

9. En cada caso, calcule el suplemento de los ángulos dados:

$S(70^\circ) =$ $\qquad$ $S(50^\circ) =$

$S(170^\circ) =$ $\qquad$ $S(179^\circ) =$

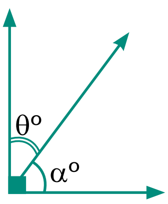
10. Del gráfico mostrado, calcule "x", si "α°" es el suplemento de 100º y $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



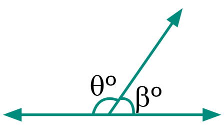
Aprende más...

Comunicación matemática

1. En el gráfico mostrado, completar:

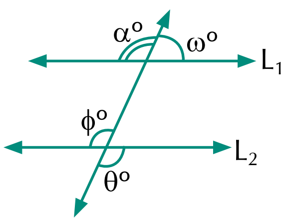


"α°" y "θ°" son ángulos ....



"θ°" y "β°" son ángulos ....

2. En el gráfico mostrado, completar, si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



$\alpha^\circ + \omega^\circ =$ ....

$\theta^\circ + \omega^\circ =$ ....

$\phi^\circ + \omega^\circ =$ ....

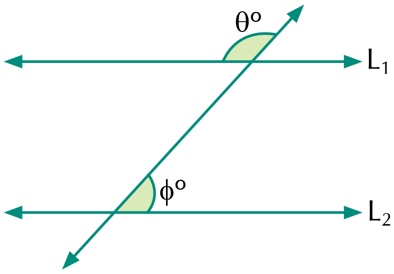
$\alpha^\circ =$ ...... $=$ ......

3. Completar:

- $C(50^\circ) =$
- $C(70^\circ) =$
- $C(80^\circ) + C(50^\circ) =$
- $C(10^\circ) + S(70^\circ) =$
- $S(50^\circ) + C(18^\circ) =$
- $S(135^\circ) + S(10^\circ) =$

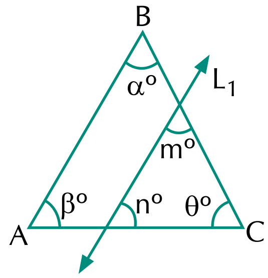
4. En cada gráfico, completar :

• Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



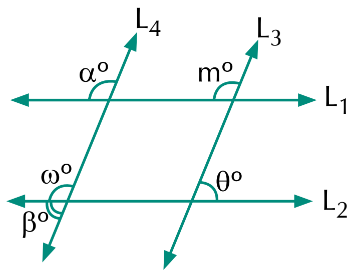
$\theta^\circ + ... = ...$

• Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overline{AB}$



$m^\circ = ...$ $\quad n^\circ = ...$ $\quad \alpha^\circ + \beta^\circ + \theta^\circ = ...$

5. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_4}$, marcar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.



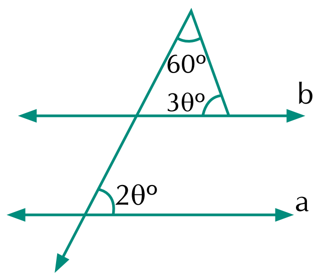
• "mº", "ωº" y "θº" miden lo mismo.. (   )

• "θº" y "βº" tienen igual medida .... (   )

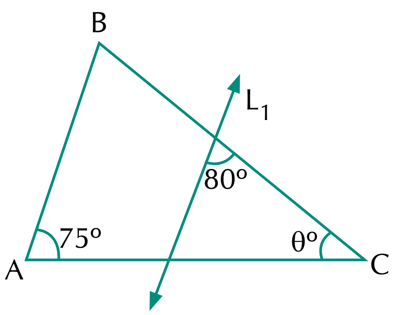
• M = 1, siendo: $M = \dfrac{\omega^\circ + \theta^\circ}{m^\circ + \beta^\circ}$ ....(   )

Resolución de problemas

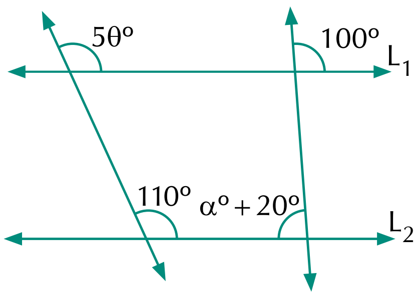
6. Si: $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b}$, calcule "θ".



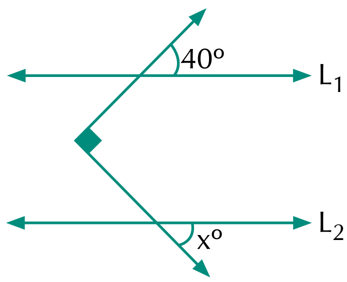
7. Del gráfico mostrado, calcule "θº", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overline{AB}$



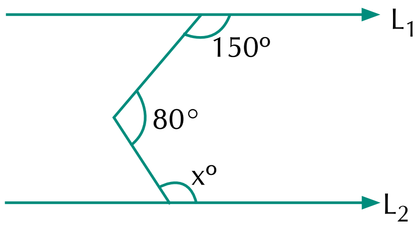
8. Del gráfico mostrado, calcule "θ + α", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



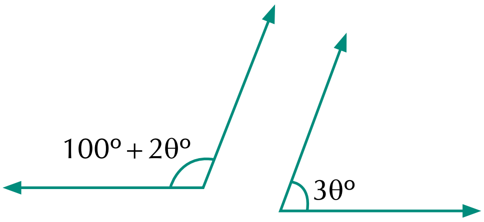
9. Del gráfico mostrado, calcule "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



10. Del gráfico mostrado, calcule "x°", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



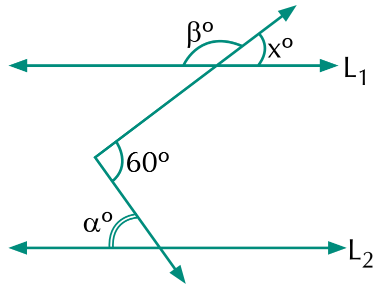
11. Del gráfico se muestra dos ángulos suplementarios, calcule "θ".



12. Calcule: $M = \dfrac{C(70°) + S(80°)}{C(80°) + S(150°)}$

Si "S" y "C" representan el suplemento y complemento de un ángulo respectivamente.

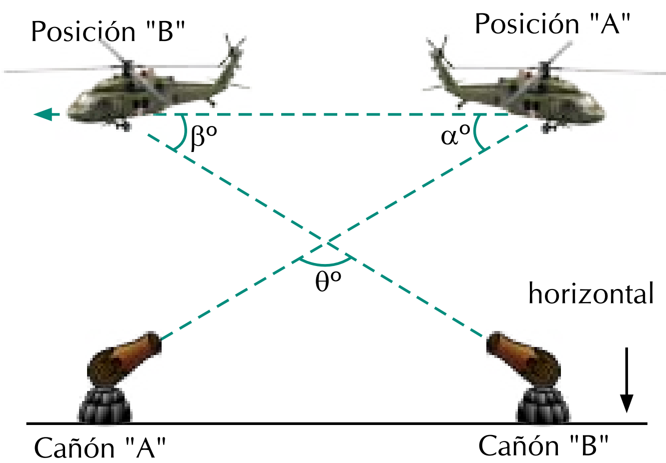
13. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y $\alpha° + \beta° = 160°$, calcule "x".



Aplicación cotidiana

Los cañones

Un cañón "A" desea derribar al helicóptero en la posición "A" y dispara un misil con un ángulo de 70° con la horizontal. Al no acertar en el blanco, un cañón "B" lanza otro misil con un ángulo de 50° con la horizontal.

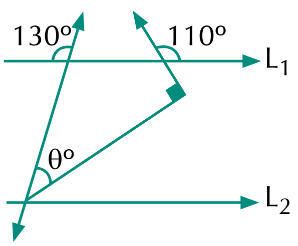


14. Asumiendo que el helicóptero viaja en forma paralela a la horizontal, calcule "α" y "β", en el instante mostrado.

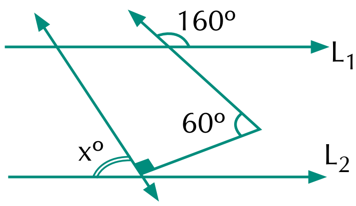
15. Para las condiciones anteriores, calcule "θ".

¡Tú puedes!

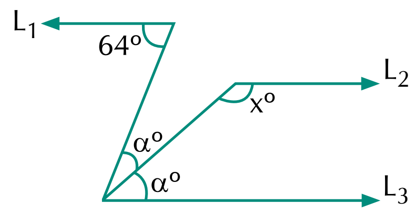
1. Del gráfico mostrado, calcule "θ", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



2. Calcule "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



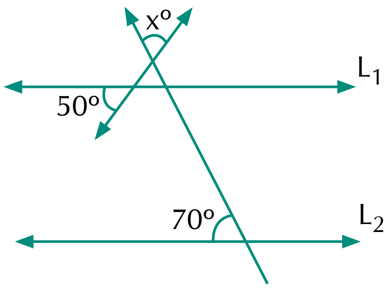
3. Del gráfico mostrado, calcule "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$



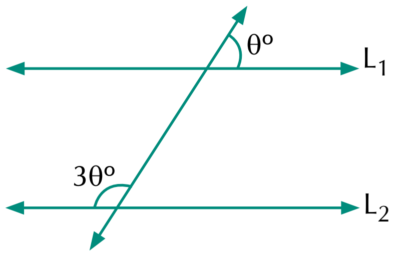
4. Calcule: $R = \dfrac{M}{N}$, si: $M = \dfrac{SSSS(10°)}{CCC(20°)}$ y $N = \dfrac{SS(10°)}{CC(20°)}$

Practica en casa

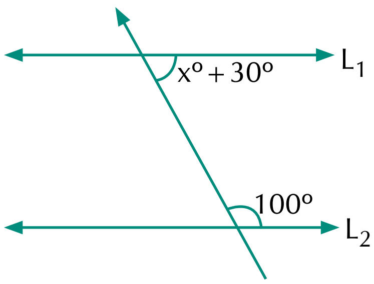
1. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "x"



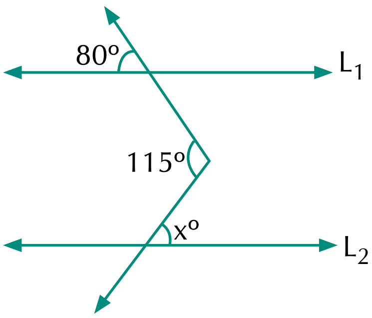
2. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "θ"



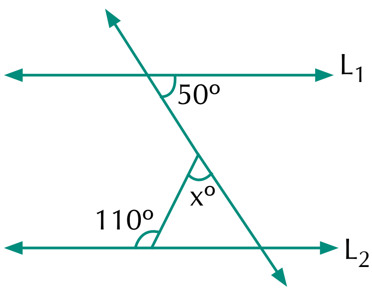
3. Del gráfico mostrado, calcule "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



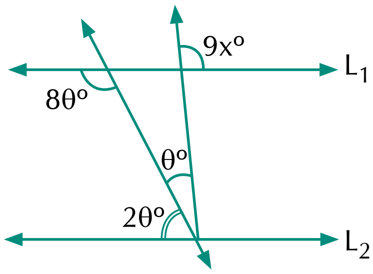
4. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "x".



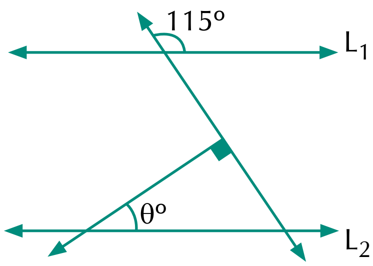
5. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "x".



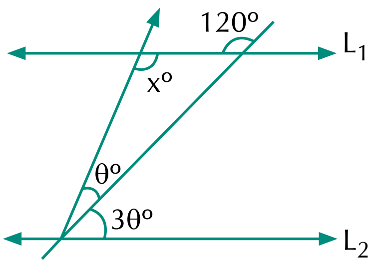
6. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "x"



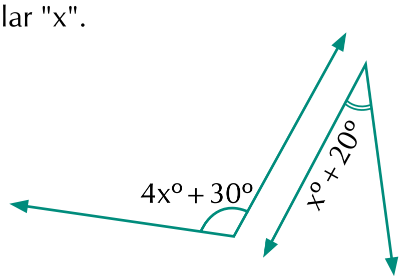
7. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "θ".



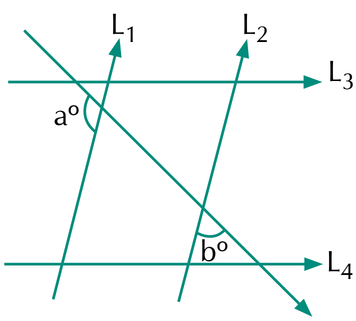
8. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "x".



9. Si los ángulos mostrados son suplementarios, calcular "x".



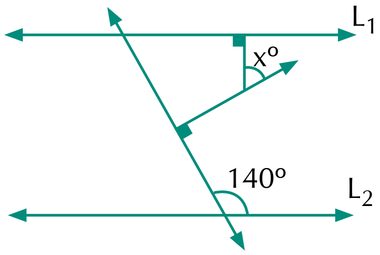
10. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_4}$, calcule "a + b"



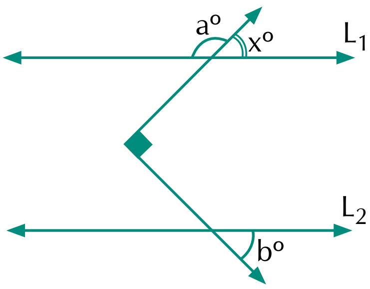
11. Calcule el complemento y suplemento de los siguientes ángulos.

- $C(80^\circ)=$
- $S(130^\circ)=$
- $C(15^\circ)=$
- $S(115^\circ)=$
- $S(108^\circ)+C(72^\circ)=$
- $C(70^\circ)+S(156^\circ)=$
- $\dfrac{S(75^\circ)}{C(75^\circ)}=$

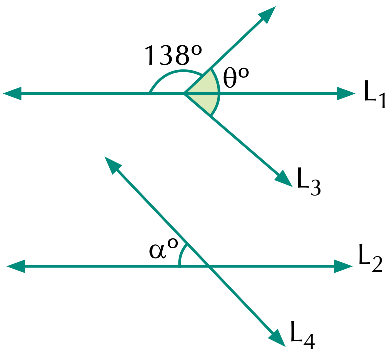
12. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "x".



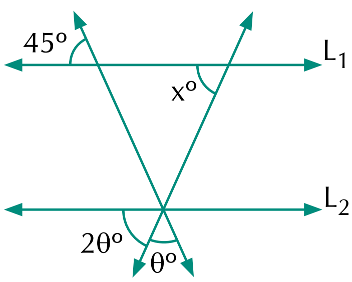
13. Del gráfico: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y $a^\circ+b^\circ=160^\circ$. Calcule "x".



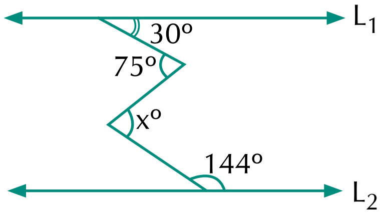
14. En el gráfico: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_4}$. Calcule "$\theta-\alpha$"



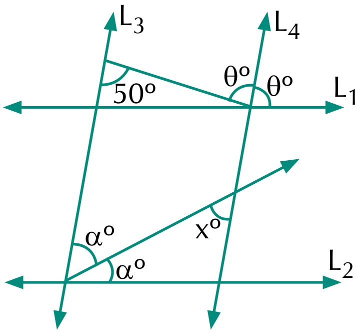
15. En el gráfico, calcule "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



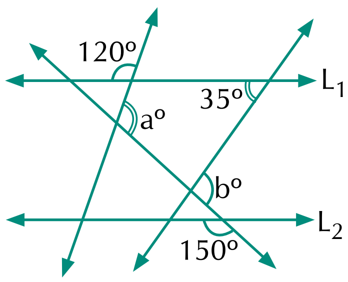
16. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "x".



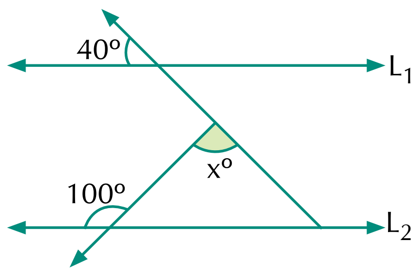
17. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_4}$, calcule "x".



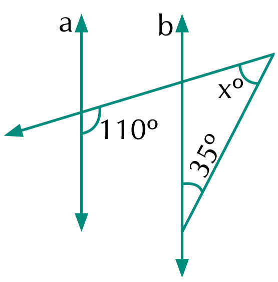
18. Calcule "a + b", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



19. Calcule "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



20. Si: $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b}$, calcule "x"



Otros sistemas de medición angular

En este capítulo aprenderemos:

- A reconocer y diferenciar otros sistemas de medidas angulares.
- A conocer y aplicar las equivalencias entre los sistemas de medidas angulares.
- A transformar de un sistema de medida a otro, haciendo uso de las equivalencias aprendidas.

La ballestilla es, básicamente, un medidor de ángulos. Con ella no solo podremos medir los ángulos que forman entre sí los distintos detalles del horizonte, sino que también puede utilizarse para medir posiciones de los planetas y la Luna con respecto a las estrellas o elevaciones de objetos celestes sobre el horizonte. La ballestilla consta de un arco de circunferencia de 57,3 cm de radio aproximadamente. Elegimos este tamaño para buscar una circunferencia de 360 cm de longitud, con lo que cada centímetro del arco de la ballestilla se corresponderá con un ángulo de un grado, que es lo más cómodo. Aplicando el extremo del radio muy cerca del ojo podemos tomar medidas angulares en nuestro horizonte. El radio central del aparato puede ser un listón de madera, mientras que para los radios de los extremos podemos utilizar dos cuerdas que mantengan la tensión. El aspecto resultante es el de una pequeña ballesta, y de ahí su nombre.

Conceptos básicos

Sistemas de medidas angulares

Medida en grados sexagesimales (Sistema inglés)

Su unidad angular es el "grado sexagesimal" (1º); en el cual definimos al ángulo de una vuelta como aquel ángulo cuya medida es 360º.

$1 \text{ vuelta} = 360^\circ$	$1^\circ = 60'$	$1' = 60''$	$1^\circ = 3\,600''$

Donde: 1' : Minuto sexagesimal.
1" : Segundo sexagesimal.

Medida en grados centesimales (Sistema francés)

Su unidad angular es el "grado centesimal" (1^g); en el cual definimos al ángulo de una vuelta como aquel ángulo cuya medida es 400^g.

$1 \text{ vuelta} = 400^g$	$1^g = 100^m$	$1^m = 100^s$	$1^g = 10\,000^s$

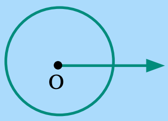
Donde: 1^m = Minuto centesimal
1^s = Segundo centesimal

Medida en radianes (Sistema radial o circular)

Su unidad es el "radián"; el cual es el ángulo central que describe un arco de longitud equivalente al radio de la circunferencia respectiva.

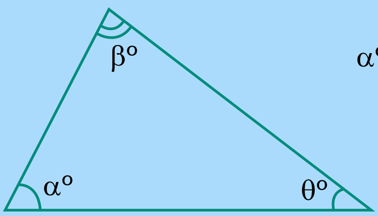
$$1 \text{ vuelta} = 2\pi \text{ rad}$$

Observación

- 

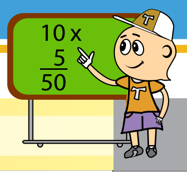
  $1 \text{ vuelta} <> 360^\circ <> 400^g <> 2\pi \text{ rad}$

- Normalmente trabajamos ángulos en el sistema de grados sexagesimales por eso:



$$\alpha^\circ + \beta^\circ + \theta^\circ = \underbrace{180^\circ}_{\downarrow}$$

Unidades en sexagesimales



Aplica lo comprendido

1. Convertir al sistema radial: 12º.

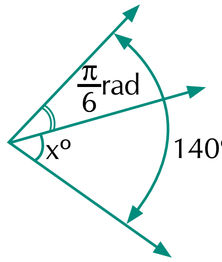
2. Convertir al sistema centesimal: 72º.

3. Convertir al sistema sexagesimal: 30^g.

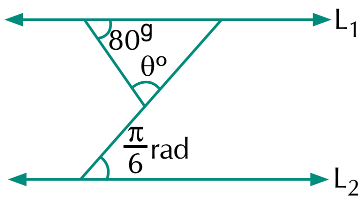
4. Convertir al sistema sexagesimal: $\frac{\pi}{4}$rad.

5. Convertir al sistema centesimal: $\frac{\pi}{10}$rad.

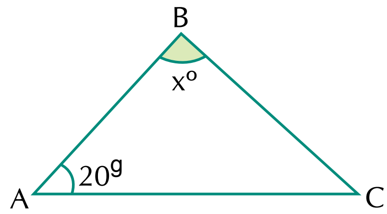
6. Del gráfico mostrado, calcule "x".



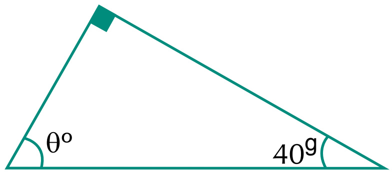
7. Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, en el sistema sexagesimal calcule "θ".



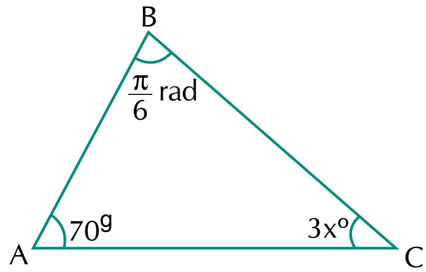
8. Del gráfico mostrado: AB = BC, calcule "x", en el sistema sexagesimal.

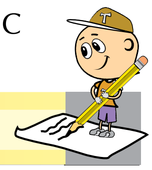


9. Del gráfico mostrado, calcule "θ", en el sistema sexagesimal



10. Del gráfico mostrado, calcule "x", en el sistema sexagesimal





Aprende más...

Comunicación matemática:

1. Relacionar con flechas:

• Sistema inglés	• π rad
• Sistema circular	• 1º
• Sistema francés	• 1^g

2. Completar:

Sistema sexagesimal →	1 vuelta = ...
Sistema centesimal →	1 vuelta = ...
Sistema radial →	1 vuelta = ...

3. Comparar indicando si es ">", "<" o igual que.

10^g	....	9^o
72^o	....	50^g
30^g	....	$\frac{\pi}{2}$ rad

4. El sistema de medida angular más usado es el ....; en donde la suma de ángulos internos de un triángulo es ....

5. Convertir a grados centesimales y radiales el ángulo 144° y colocar su equivalencia.

$$144^o < > (\ldots\ldots\ldots\ldots)^g < > (\ldots\ldots\ldots\ldots)\text{rad.}$$

Resolución de problemas

6. Convertir al sistema sexagesimal y radial el siguiente ángulo: 60^g.

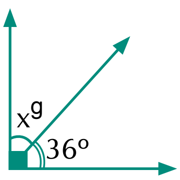
7. Convertir $\frac{\pi}{3}$ rad al sistema sexagesimal.

8. Convertir $\frac{\pi}{5}$ rad al sistema centesimal.

9. Simplificar:

$$E = \frac{1^o}{1'} + \frac{1^g}{1^m} + \frac{9^o}{5^g}$$

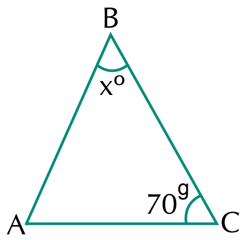
10. Del gráfico, calcule "x".



11. Calcule "a+b", sabiendo que:

$$\frac{\pi}{8}\text{rad} < > a^o b'$$

12. Calcule "x" en el sistema sexagesimal, si: AB = BC.



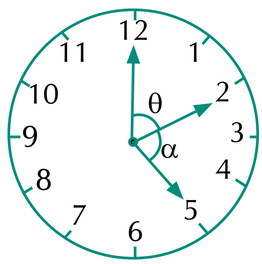
13. El mayor ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide $\frac{2\pi}{5}$ rad, indicar la medida del menor ángulo en sexagesimales.

Aplicación cotidiana

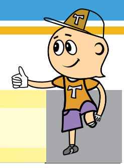
El reloj

14. Un alumno de Francia mide los ángulos de un reloj y se percata que: $\theta = \frac{200^g}{3}$ y $\alpha = 100^g$.

Si un alumno de Trilce desea ver los ángulos en el sistema sexagesimal, ¿cuánto medirán "α" y "θ"?



15. ¿Cuánto medirán los ángulos "α" y "θ" en el sistema radial?



¡Tú puedes!

1. Los ángulos internos de un triángulo miden: $(14x)^o$; $\left(\frac{20x}{3}\right)^g$ y $\frac{\pi}{3}$rad. Calcular "x".

2. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo miden: $(17x+2)^o$ y $20(x+1)^g$. Calcular "x".

3. Calcular: $F=40^g+\frac{\pi}{12}$ rad en el sistema sexagesimal.

4. Las medidas de los ángulos internos de un triángulo son proporcionales a 3; 5 y 7. Determinar la medida del menor ángulo en radianes.

5. El doble del número de grados sexagesimales disminuido en el número de grados centesimales del mismo ángulo es igual a 120. Determinar la medida en radianes de dicho ángulo.

Practica en casa

1. Convertir 60^g al sistema radial.

2. Convertir $\frac{\pi}{40}$rad al sistema centesimal.

3. Convertir 72^o al sistema centesimal.

4. Convertir 45^o al sistema radial.

5. Convertir 10^o al sistema radial.

6. Convertir 80^o al sistema radial.

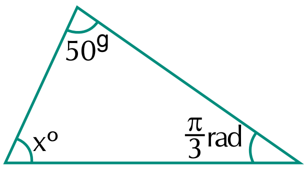
7. Convertir $\frac{\pi}{8}$rad al sistema centesimal.

8. Convertir $\frac{\pi}{6}$rad al sistema sexagesimal.

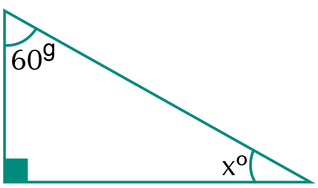
9. Convertir 40^g al sistema radial.

10. Convertir 70^g al sistema sexagesimal.

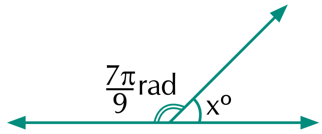
11. Calcule "x", en el sistema sexagesimal.



12. Del gráfico mostrado, calcule "x" en el sistema sexagesimal.



13. Del gráfico mostrado, calcular "x".



14. Calcule "x", si: $(8x+6)^o=\frac{3\pi}{10}$ rad

15. Calcule "x", si: $(7x+5)^o=10(x-1)^g$

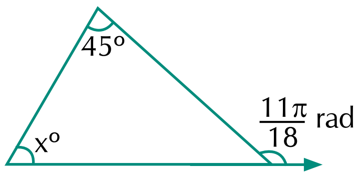
16. Calcule "x", si: $3(x+5)^o=\frac{x\pi}{30}$ rad

17. Calcule "m", sabiendo que:

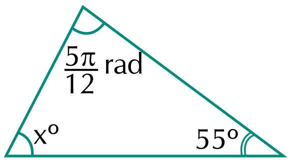
$$(5m-2)^o=(6m-4)^g$$

18. Calcule la medida de un ángulo exterior de un triángulo equilátero en el sistema radial.

19. Calcule "x", en el sistema inglés.



20. Calcule "x", en el sistema inglés



Triángulos

En este capítulo aprenderemos:

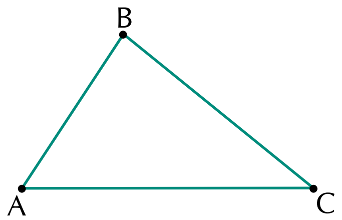
- A definir al triángulo.
- A identificar y relacionar los elementos asociados al triángulo.
- A identificar y aplicar los teoremas fundamentales asociados al triángulo.
- A reconocer y graficar los diferentes tipos de triángulos.

La eficiencia estructural de un puente puede ser considerada como el radio de carga soportada por el peso del puente, dado un determinado conjunto de materiales y la forma triangular de su estructura. En un desafío común, algunos estudiantes son divididos en grupos y reciben cierta cantidad de palos de madera, una distancia para construir, y pegamento, y después les piden que construyan un puente que será puesto a prueba hasta destruirlo, agregando progresivamente carga en su centro. El puente que resista la mayor carga es el más eficiente. Una medición más formal de este ejercicio es pesar el puente completado en lugar de medir una cantidad arreglada de materiales proporcionados y determinar el múltiplo de este peso que el puente puede soportar, una prueba que enfatiza la economía de los materiales y la eficiencia de las ensambladuras con pegamento.
La eficiencia económica de un puente depende del sitio y tráfico, el radio de ahorros por tener el puente (en lugar de, por ejemplo, un ferry, o una ruta más larga) comparado con su costo. El costo de su vida está compuesto de materiales, mano de obra, maquinaria, ingeniería, costo del dinero, seguro, mantenimiento, renovación, y finalmente, demolición y eliminación de sus asociados, reciclado, y reemplazado, menos el valor de chatarra y reutilización de sus componentes. Los puentes que emplean solo compresión son relativamente ineficientes estructuralmente, pero pueden ser altamente eficientes económicamente donde los materiales necesarios están disponibles cerca del sitio y el costo de la mano de obra es bajo. Para puentes de tamaño medio, los apuntalados o de vigas son usualmente los más económicos, mientras que en algunos casos, la apariencia del puente puede ser más importante que su eficiencia de costo. Los puentes más grandes generalmente deben construirse suspendidos.

Conceptos básicos

Definición

Es la figura geométrica formada al unir tres puntos no colineales mediante segmentos.

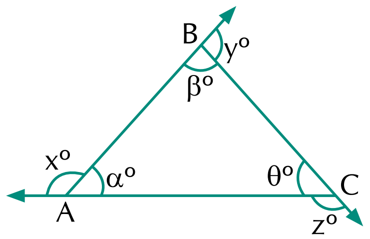


Elementos:

- Vértices: "A", "B" y "C".
- Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$

Notación: triángulo ABC: $\triangle ABC$

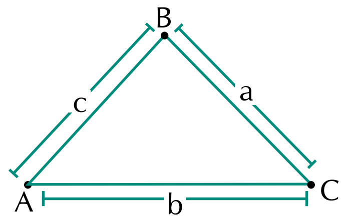
Ángulos determinados



Medida de los ángulos:

- Internos: "α°", "β°", "θ°".
- Externos: "x°", "y°", "z°".

Perímetro del triángulo



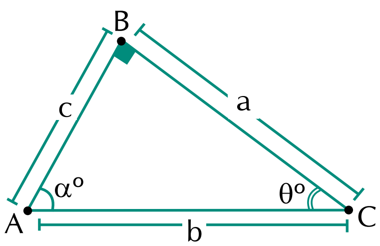
$$\boxed{2P_{\triangle ABC} = a+b+c}$$

Semiperímetro: $P_{\triangle ABC} = \dfrac{a+b+c}{2}$

Clasificación de triángulos

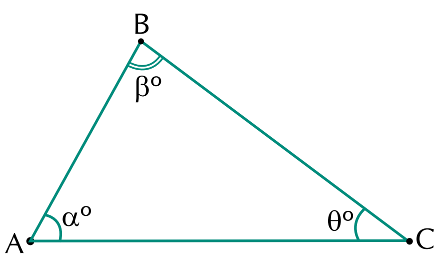
Según la medida de sus ángulos

Triángulo rectángulo
Es aquel que tiene un ángulo recto.



- Catetos: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$
- Hipotenusa: $\overline{AC}$
- Teorema de Pitágoras: $\boxed{b^2 = c^2 + a^2}$

Triángulo acutángulo
Presenta todos sus ángulos internos agudos.



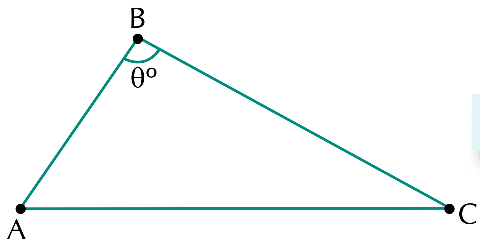
$\boxed{\alpha° < 90°}$

$\boxed{\beta° < 90°}$

$\boxed{\theta° < 90°}$

Triángulo obtusángulo

Es aquel triángulo que tiene un ángulo interno obtuso.

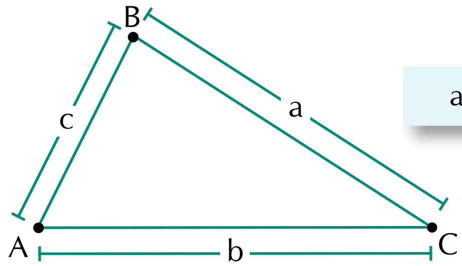


$90º < θº < 180º$

Según la longitud de sus lados

Triángulo escaleno

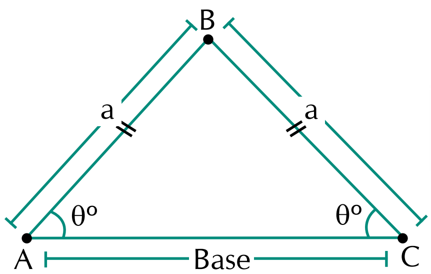
Es aquel triángulo que presenta lados de diferente longitud.



$a \neq b \neq c$

Triángulo isósceles

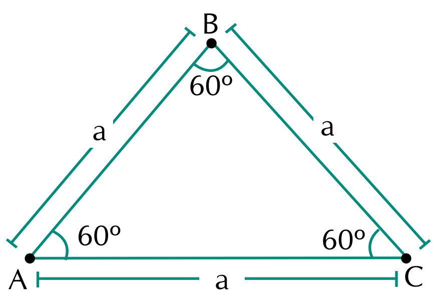
Es aquel triángulo en el cual dos de sus lados tienen la misma longitud.



$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son los lados congruentes.

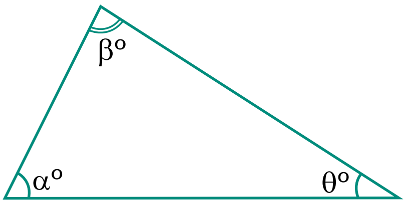
Triángulo equilátero

Es aquel triángulo que tiene sus tres lados de igual longitud.



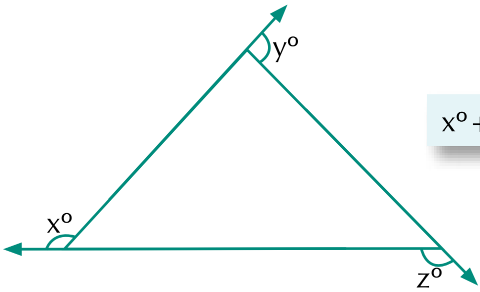
Teoremas fundamentales del triángulo

Suma de ángulos internos



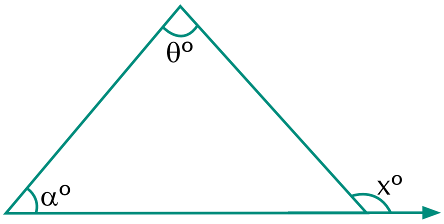
$$\alpha^\circ + \beta^\circ + \theta^\circ = 180^\circ$$

Suma de ángulos externos



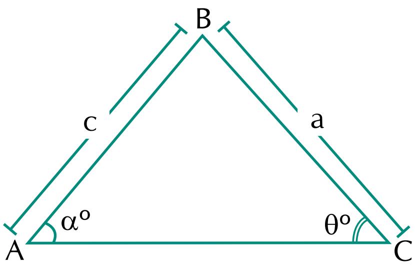
$$x^\circ + y^\circ + z^\circ = 360^\circ$$

Medida del ángulo exterior



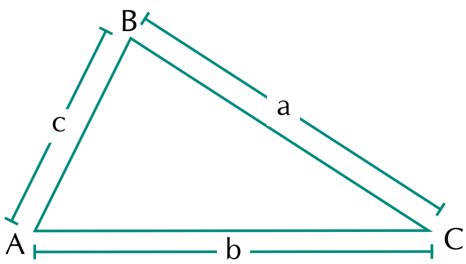
$$x^\circ = \alpha^\circ + \theta^\circ$$

Relación de correspondencia



$$\text{si: } c > a \longrightarrow \theta^\circ > \alpha^\circ$$

Desigualdad triangular

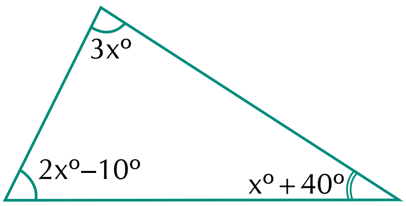


$$\text{Sea: } a \geq b \geq c$$

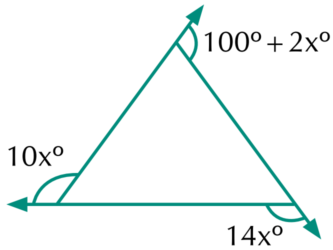
$$\Rightarrow \quad b - c < a < b + c$$

1. Graficar un triángulo, en donde sus ángulos internos midan "x", "2x" y "3x", luego, calcule "x".

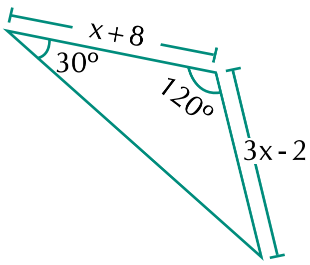
2. En el siguiente gráfico, calcule "x°" y clasificar el triángulo.



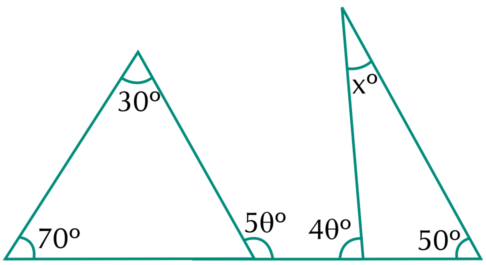
3. Del gráfico mostrado, calcule "x".



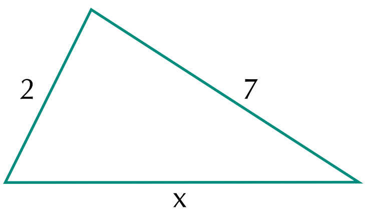
4. Del gráfico mostrado, calcule "x".

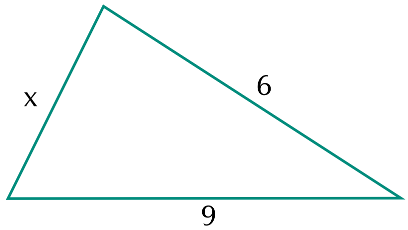


5. Del gráfico mostrado, calcule "x".

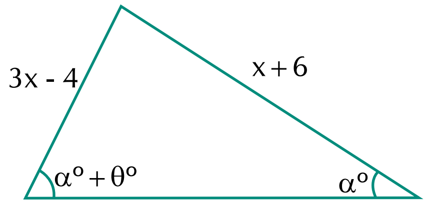


6. Del gráfico mostrado, ¿cuántos valores enteros puede tomar "x" en cada caso?

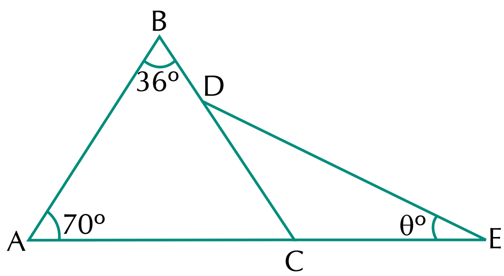




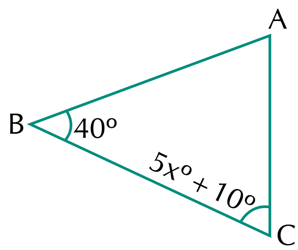
7. Del gráfico mostrado, calcule el máximo valor entero de "x".



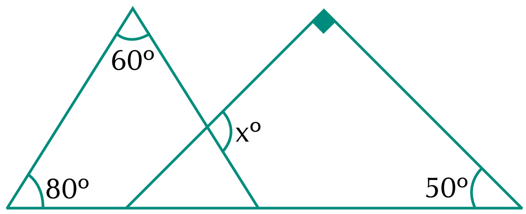
8. Del gráfico mostrado, calcule "θ", si: CD = CE



9. Del gráfico mostrado, calcule "x", si: AB = BC



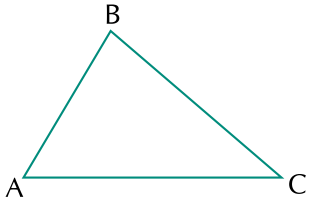
10. Del gráfico mostrado, calcule "x".



Aprende más...

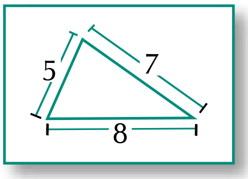
Comunicación matemática

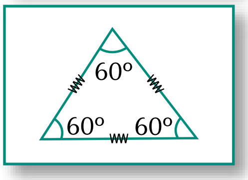
1. De acuerdo al gráfico, completar los espacios correspondientes.

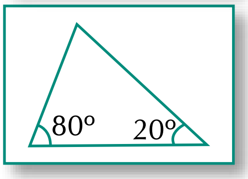


- Los vértices de un triángulo son: ....
- Los ángulos internos del triángulo suman ....
- Los ángulos externos suman ....
- Un ángulo interno y un ángulo externo de un mismo vértice suman..........................
- En el gráfico mostrado, los lados son: ....

2. Relaciona con flechas :





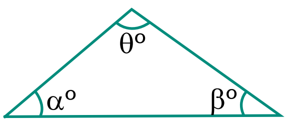
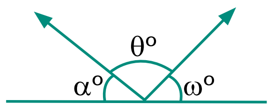
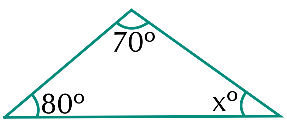
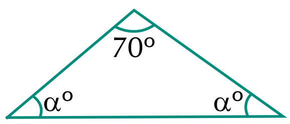
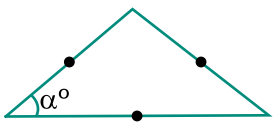
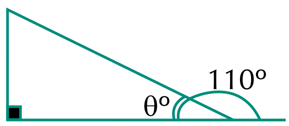


Triángulo equilátero

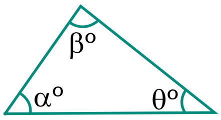
Triángulo isósceles

Triángulo escaleno

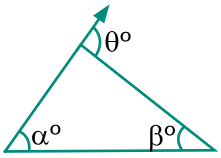
3. Comparar indicando si es ">" (mayor que), "<" (menor que) ó "=" (igual que), en cada caso.

Columna A	Signo	Columna B
		
"$\alpha^o + \beta^o + \theta^o$"		"$\alpha^o + \theta^o + \omega^o$"
		
"x^o"		"α^o"
		
"α^o"		"θ^o"

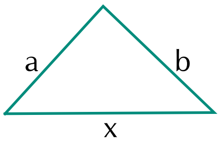
4. Completar de acuerdo al gráfico, la ecuación correspondiente en cada caso.

- 

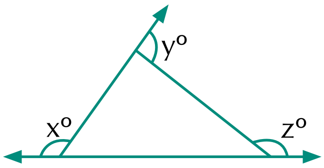
  $\alpha^{\circ}+\beta^{\circ}+\theta^{\circ}=$ ....

- 

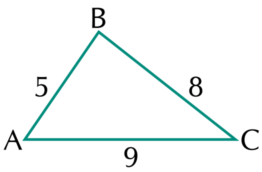
  $\theta^{\circ}=$ ....

- 

  ..... − ..... < x < ..... + ...

- 

  $x^{\circ}+y^{\circ}+$ ..... = ...

- 

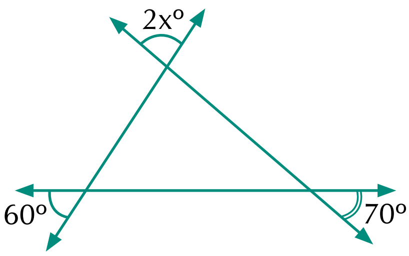
  $2P_{\triangle ABC}=$ ....

5. Graficar en cada caso, usando la regla.

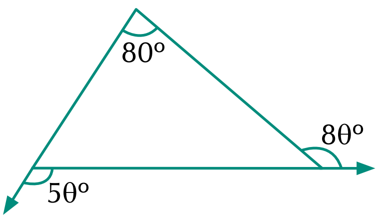
   - Un triángulo ABC isósceles de ángulos iguales a 35° y base 4 cm.
   - Un triángulo PQR escaleno de lados 4; 8 y 9 cm.

Resolución de problemas

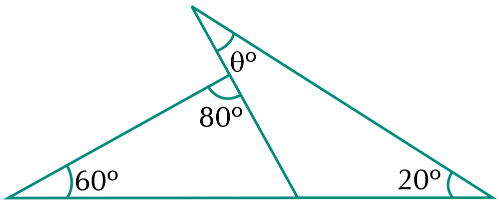
6. En el gráfico, calcule "x".



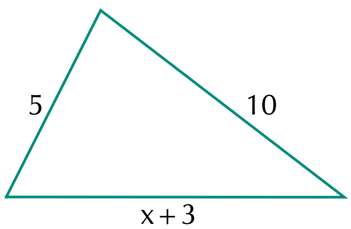
7. En el gráfico, calcule "θ".



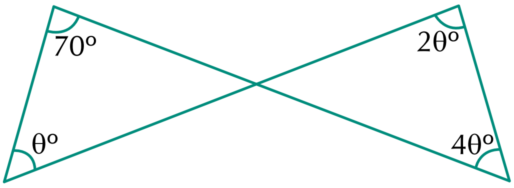
8. En el gráfico, calcule "θ".



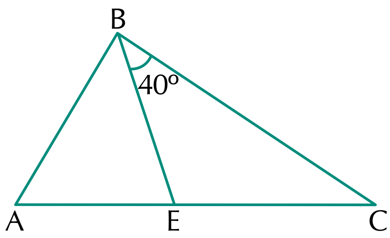
9. En la figura, calcule el mínimo y máximo valor entero de "x" para que el triángulo exista.



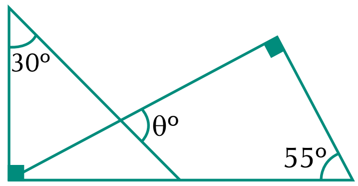
10. Del gráfico mostrado, calcule "θ".



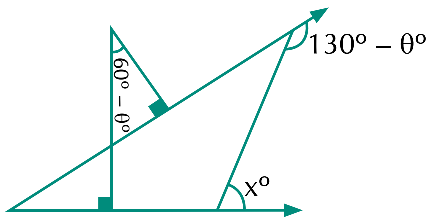
11. Si: AB = BE = CE, calcule la m∢ABC.



12. Del gráfico mostrado, calcule "θ".



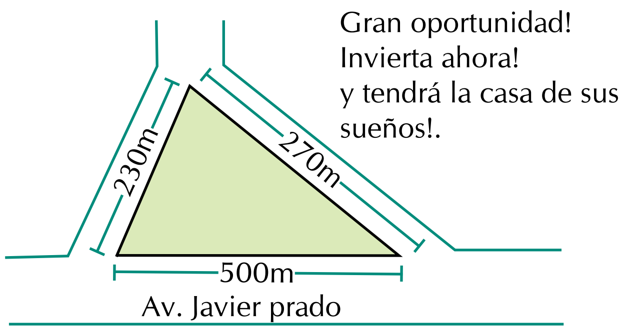
13. Del gráfico mostrado, calcule "x".



Aplicación cotidiana

El terreno fantasma

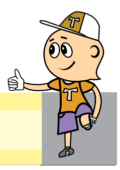
En la inmobiliaria "tiger" los vendedores publican el siguiente aviso en un diario:



pasaron meses y nunca llegaron compradores.

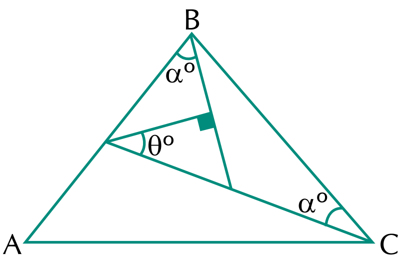
14. ¿A cuál de los teoremas de "propiedades de los triángulos" relacionas el problema?

15. ¿A qué atribuyes el por qué no se presentaron compradores?

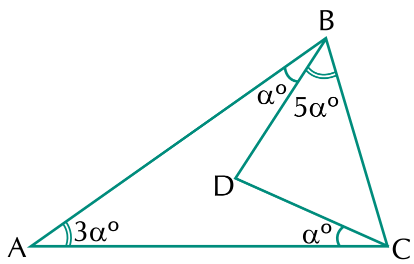


¡Tú puedes!

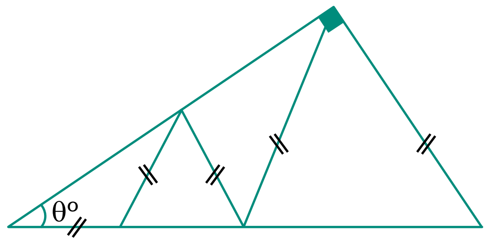
1. Del gráfico mostrado, calcule "θº", si el triángulo ABC es equilátero.



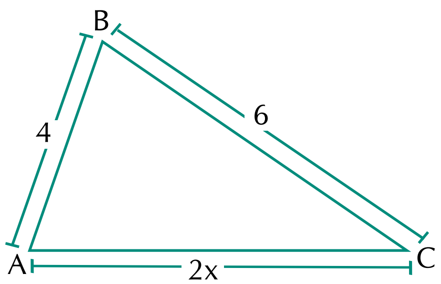
2. Del gráfico mostrado, calcular "α", si: AB = DC



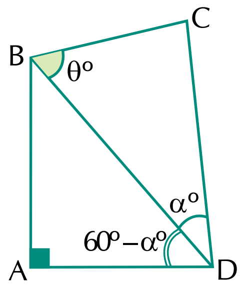
3. Del siguiente gráfico, calcule "θ".



4. ¿Cuántos valores enteros toma "x", si el triángulo es escaleno?

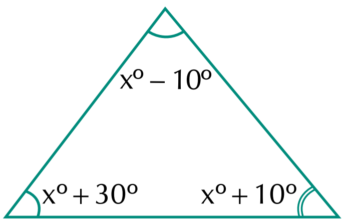


5. Del gráfico mostrado, calcule "θ", si: AD = AB = CD.

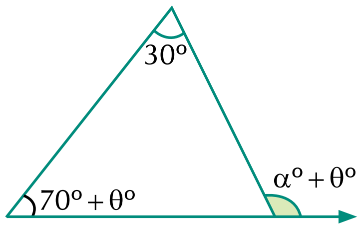


Practica en casa

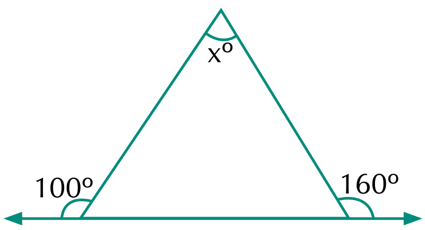
1. Del gráfico mostrado, calcule "x".



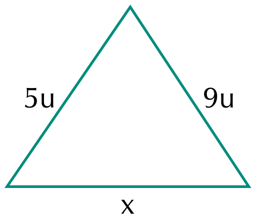
2. Calcule "α".



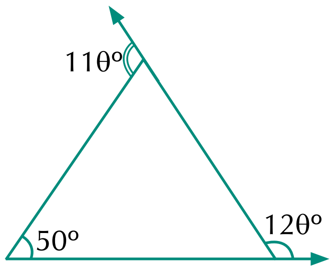
3. Calcule "x".



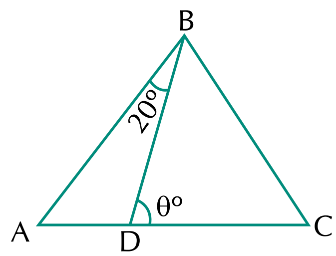
4. ¿Cuál es el mayor valor par que puede tomar "x", para que el triángulo exista?



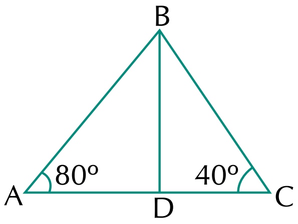
5. Del gráfico mostrado, calcule "θº".



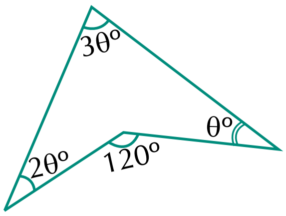
6. Del gráfico mostrado, calcule "θº", si ABC es un triángulo equilátero.



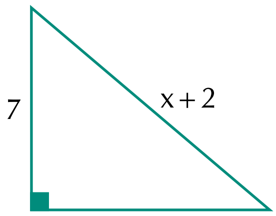
7. Si: CD = BD, calcule la m∢ABD.



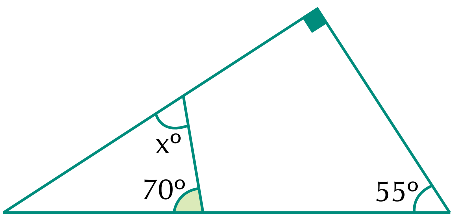
8. Del gráfico mostrado, calcule "θ".



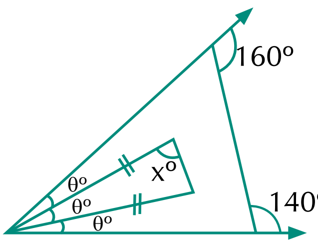
9. ¿Cuál es el menor valor entero que puede tomar "x"?



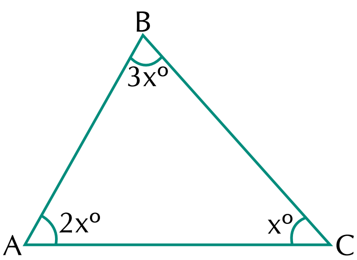
10. Del gráfico mostrado, calcule "x".



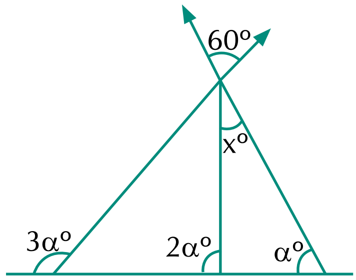
11. Calcule "x".



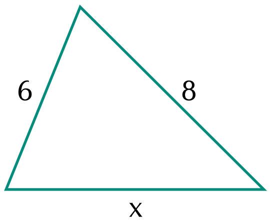
12. Clasificar que tipo de triángulo es ABC.



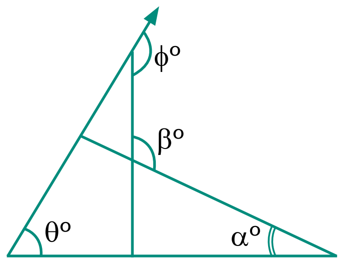
13. Del gráfico mostrado, calcule "x".



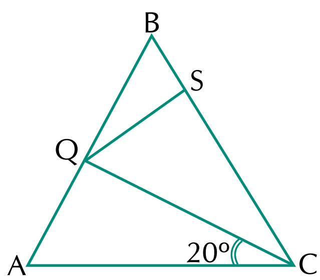
14. Del gráfico mostrado, calcule el mínimo valor impar de "x".



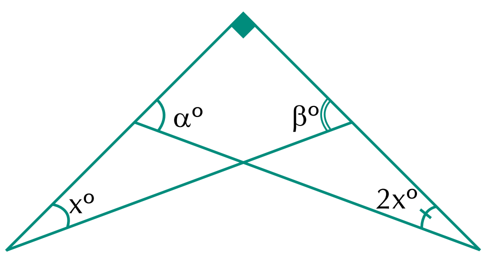
15. Calcule "α + θ", si: $\phi° + \beta° = 280°$.



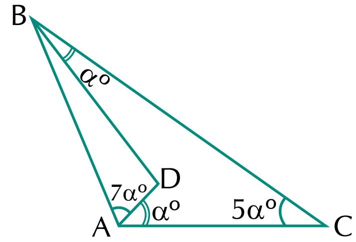
16. Del gráfico mostrado AB = BC y el triángulo QSC es equilátero. Calcule la m∢BQS.



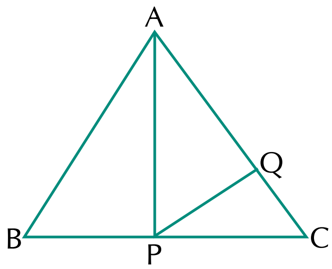
17. Del gráfico mostrado calcule "x", si: $\alpha° + \beta° = 120°$.



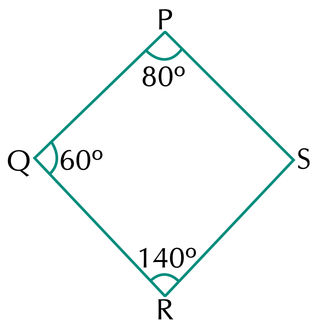
18. Del gráfico mostrado: BD = AC. Calcule "α".



19. Del gráfico mostrado, AB = AC; m∢BAP = 28° y AP = AQ. Calcule la m∢QPC.



20. Calcule la m∢QSR, si: PQ = QR



Líneas notables asociadas al triángulo I

En este capítulo aprenderemos:

- A reconocer y establecer la diferencia que existe entre las principales líneas notables asociadas al triángulo.
- A graficar la ceviana, la altura y la bisectriz.
- A calcular el área de las regiones triangulares.

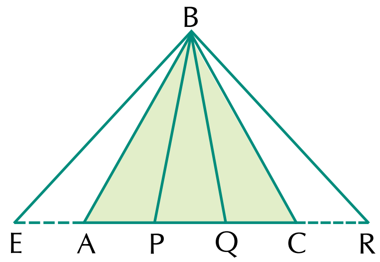
http://www.backfocus.es/blog/nikon-d3x/

El primer fotógrafo fue Joseph-Nicéphore Niépce en 1826, utilizando una cámara hecha de madera fabricada por Charles y Vincent Chevalier en París. Sin embargo, aunque se considera "oficialmente" que éste fue el nacimiento de la fotografía, la invención de la cámara puede ser rastreada mucho antes. Pero no fue hasta la invención de la fotografía "moderna" que se pudieron preservar las imágenes tomadas por esas cámaras, mientras tanto se tenían que dibujar manualmente las fotografías para conservar la imagen capturada por ellas.
La primera cámara que fue lo suficientemente pequeña como para considerarse portátil y práctica para la fotografía fue construida por Johann Zahn en 1685, aunque pasarían 90 años más para que la tecnología se percatara de las posibilidades de este aparato. Las primeras cámaras fotográficas eran similares en esencia al modelo de Zahn, aunque generalmente con una mejora en el enfoque. Antes de cada exposición una placa sensibilizada era insertada en frente de la pantalla de observación para poder grabar la imagen. El popular daguerrotipo de Louis Daguerre utilizaba placas de cobre en el proceso, mientras que el proceso calotipo inventado por William Fox Talbot grababa las imágenes en papel.

Conceptos básicos

Ceviana

Segmento que une un vértice con un punto del lado opuesto o de su prolongación.



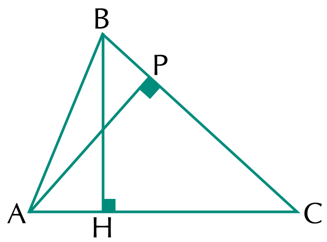
En el △ ABC:

- Cevianas interiores: $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ relativas a $\overline{AC}$.
- Cevianas exteriores: $\overline{BE}$ y $\overline{BR}$ relativas a $\overline{AC}$.

Altura

Es aquella ceviana que es perpendicular al lado al cual es relativo.

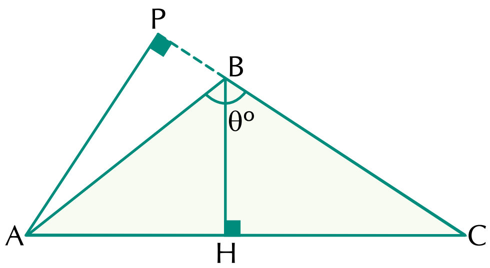
En el triángulo acutángulo



$\overline{BH}$: Altura relativa a $\overline{AC}$.

$\overline{AP}$: Altura relativa a $\overline{BC}$.

En el triángulo obtusángulo

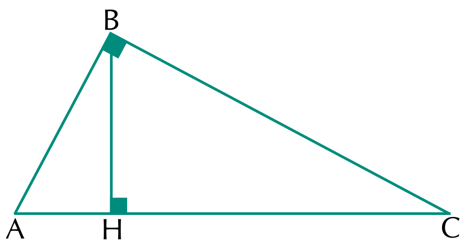


"θ°": ángulo obtuso.

$\overline{BH}$: Altura relativa a $\overline{AC}$

$\overline{AP}$: Altura relativa a la prolongación de $\overline{CB}$

En el triángulo rectángulo



$\overline{BH}$: Altura relativa a la hipotenusa $\overline{AC}$.

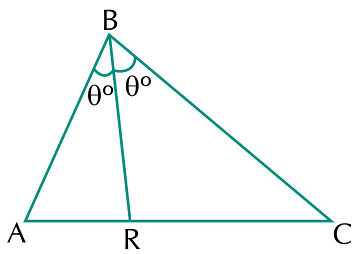
$\overline{AB}$: Altura relativa al cateto $\overline{BC}$.

$\overline{CB}$: Altura relativa al cateto $\overline{AB}$.

Bisectriz

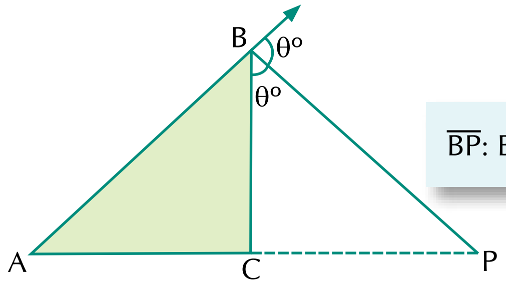
Es la ceviana que biseca a un ángulo interior o exterior de un triángulo.

Bisectriz interior



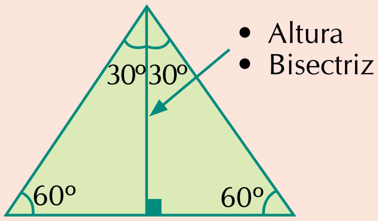
$\overline{BR}$: Bisectriz interior relativa a $\overline{AC}$.

Bisectriz exterior

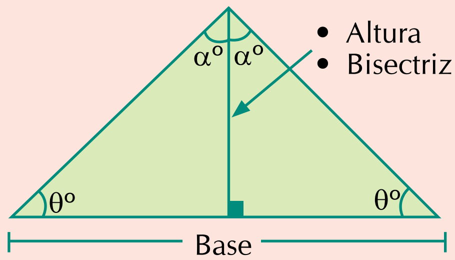


$\overline{BP}$: Bisectriz exterior relativa a la prolongación de $\overline{AC}$.

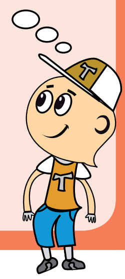
Recuerda que...



Triángulo equilátero

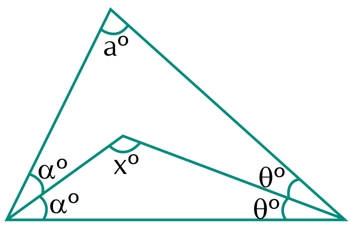


Triángulo isósceles



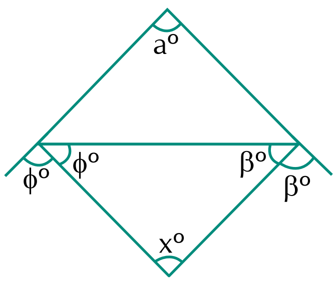
Propiedades asociadas a la bisectriz

Ángulo formado por dos bisectrices interiores



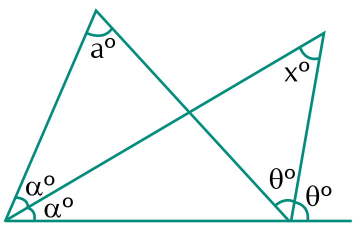
$$x^\circ = 90^\circ + \frac{a^\circ}{2}$$

Ángulo formado por dos bisectrices exteriores



$$x^\circ = 90^\circ - \frac{a^\circ}{2}$$

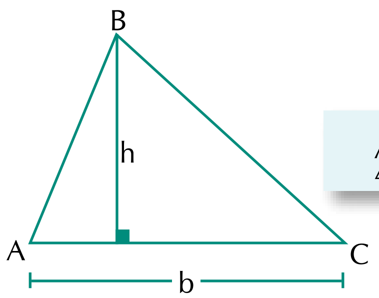
Ángulo formado por una bisectriz interior y otra bisectriz exterior



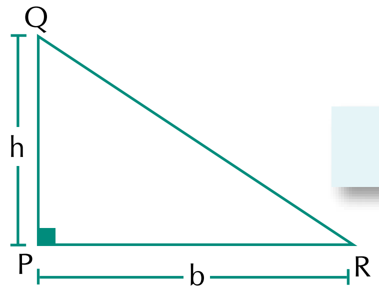
$$x^\circ = \frac{a^\circ}{2}$$

Importante

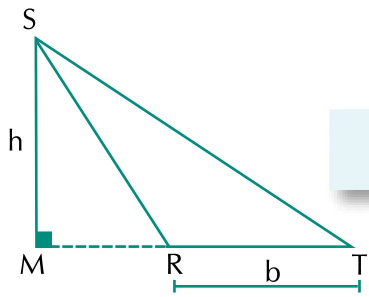
Ahora que conocemos como trazar una altura, podemos calcular el área de la región triangular.



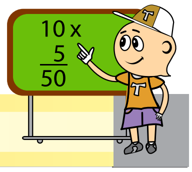
$$\text{Área}_{\triangle ABC} = \frac{b.h}{2}$$



$$\text{Área}_{\triangle PQR} = \frac{b.h}{2}$$

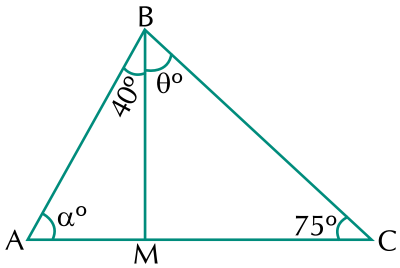


$$\text{Área}_{\triangle RST} = \frac{b.h}{2}$$



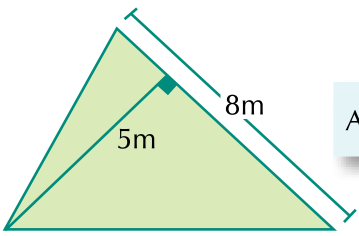
Aplica lo comprendido

1. En el triángulo ABC mostrado, $\overline{BM}$ es altura, calcule "$\alpha - \theta$"



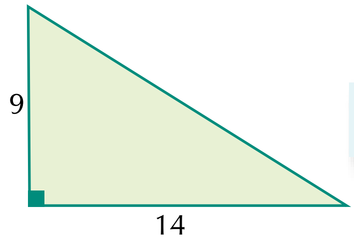
2. En cada caso, calcule el área de la región triangular mostrada.

•



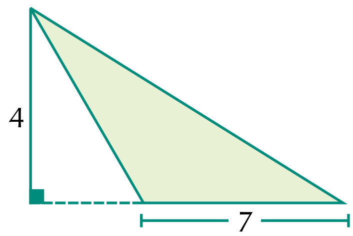
A =

•



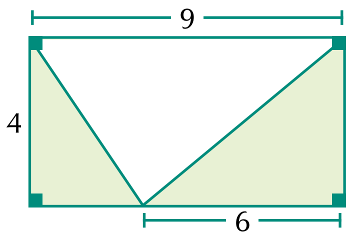
A =

•



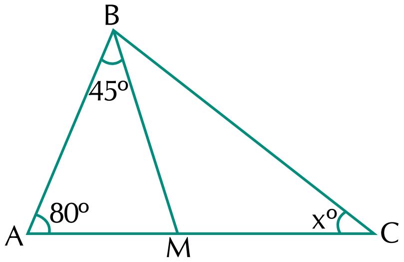
A =

•

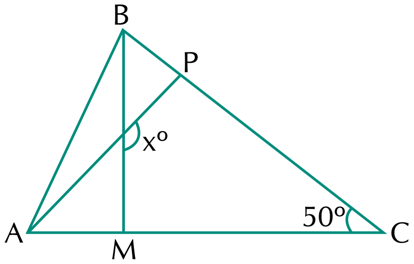


A =

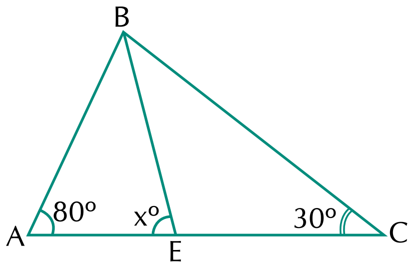
3 . Del gráfico mostrado, calcule "x", si $\overline{BM}$ es bisectriz del ángulo ABC.



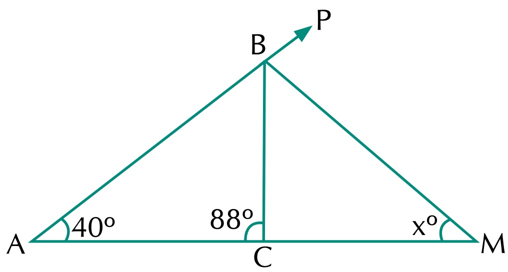
4. Del gráfico mostrado, calcule "x", si $\overline{AP}$ y $\overline{BM}$ son alturas.



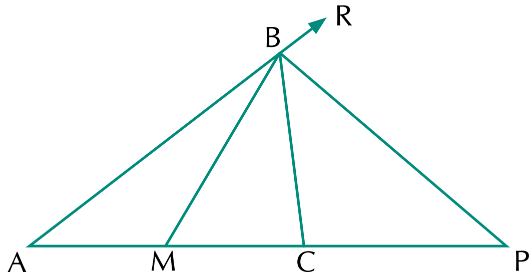
5. Si $\overline{BE}$ es bisectriz del ángulo ABC, calcule "x".



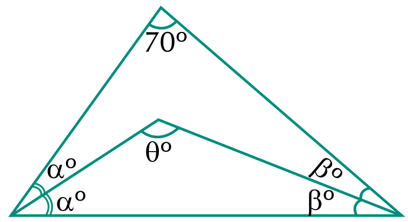
6. Del gráfico mostrado, calcule "x", si $\overline{BM}$ es bisectriz exterior del ángulo PBC.



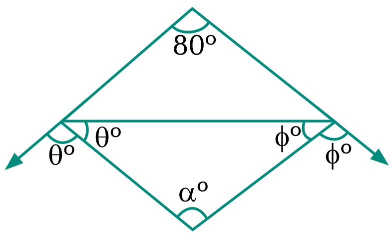
7. Del gráfico mostrado, $\overline{BM}$ es bisectriz interior del ángulo ABC y $\overline{BP}$ es bisectriz exterior del ángulo RBC, calcule la m∢MBP.



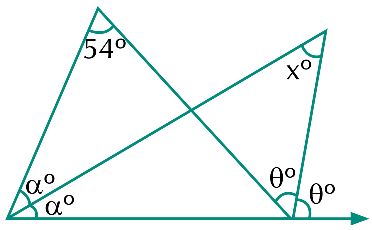
8. Del gráfico mostrado, calcule "θ".

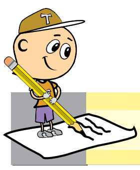


9. Del gráfico mostrado, calcule "α".



10. Del gráfico mostrado, calcule "x".





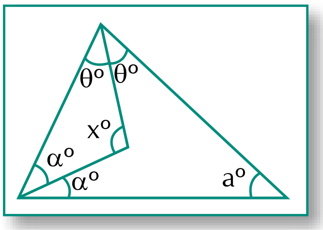
Aprende más...

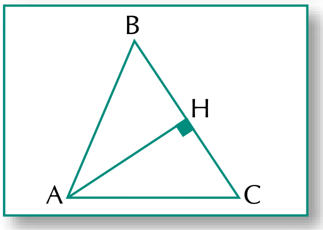
Comunicación matemática

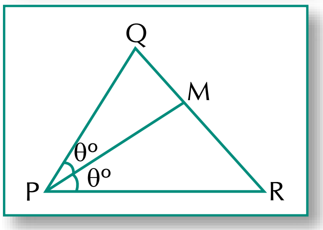
1. Indicar si es verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

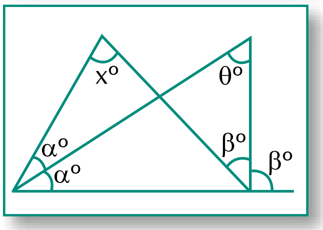
- La ceviana es un segmento .... (   )
- La altura y la bisectriz interior son consideradas lo mismo .... (   )
- En un triángulo rectángulo dos de sus alturas se encuentran sobre la hipotenusa del triángulo .... (   )

2. Relacionar con flechas.









$x° = 90° + \dfrac{a°}{2}$

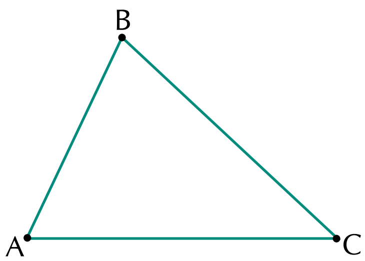
Bisectriz interior

Altura

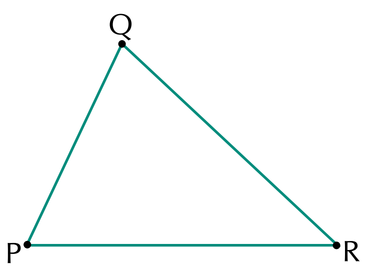
$θ° = \dfrac{x°}{2}$

3. Graficar las líneas notables pedidas en cada triángulo.

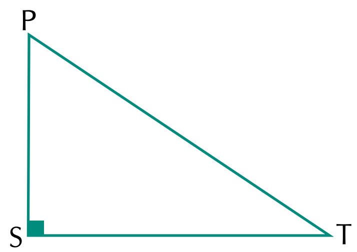
- La ceviana interior $\overline{AP}$ relativa a $\overline{BC}$.



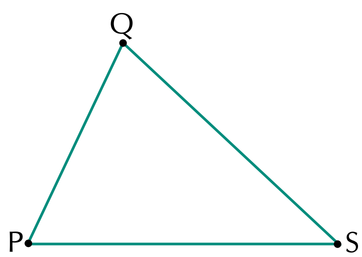
- La altura $\overline{RT}$ relativa a $\overline{PQ}$.



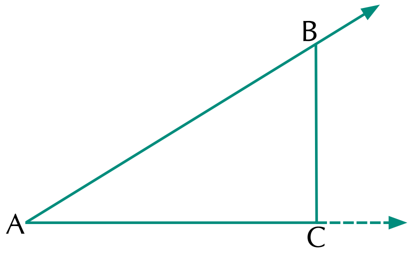
- La altura $\overline{SM}$ relativa a $\overline{PT}$.



- La bisectriz interior $\overline{QM}$ relativa a $\overline{PS}$.

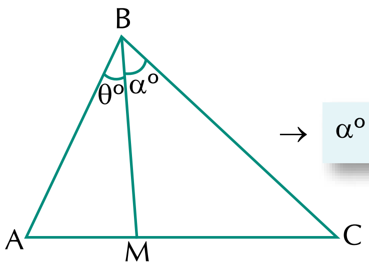


- La bisectriz exterior del vértice "B" relativa a la prolongación de AC.



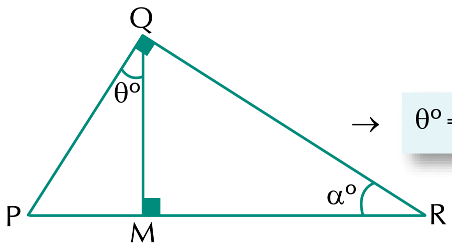
4. Completar la relación correcta .

- Si $\overline{BM}$ es bisectriz interior



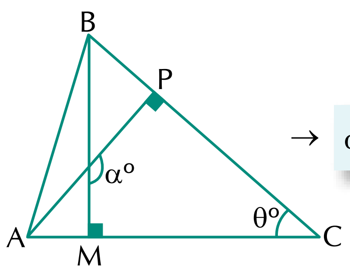
→ $\alpha^\circ =$ ....

- Si $\overline{QM}$ es altura relativa a $\overline{PR}$.



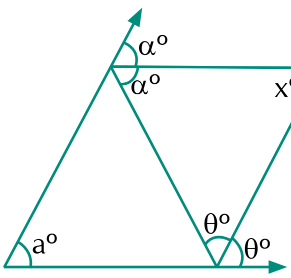
→ $\theta^\circ =$ ....

- Si $\overline{BM}$ y $\overline{AP}$ son alturas



→ $\alpha^\circ +$ ...... $=$ ......

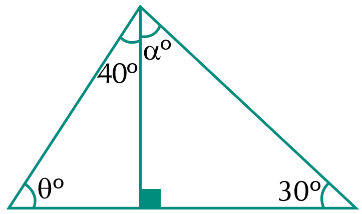
-



$x^\circ = 90^\circ - \frac{\quad}{2}$

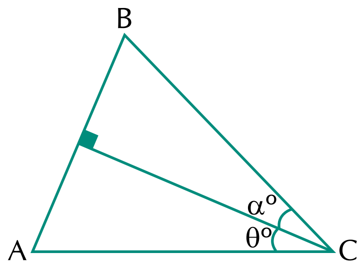
5. Comparar en cada caso, la columna "A" con la columna "B" indicando si es ">"; "<" ó "=".

-



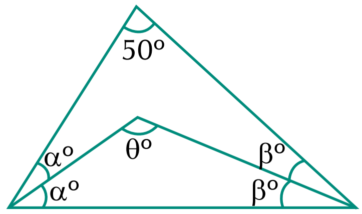
Columna A		Columna B
αº	....	θº

- Si: AC = BC



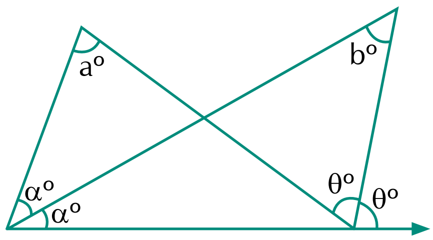
Columna A		Columna B
αº	....	θº

-



Columna A		Columna B
θº	....	200º

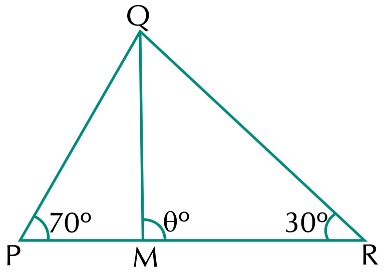
-



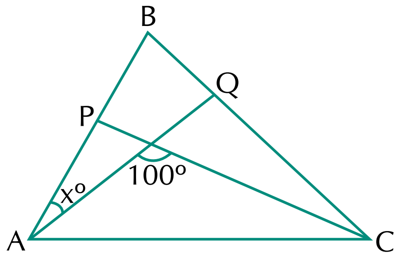
Columna A		Columna B
aº	....	bº

Resolución de problemas

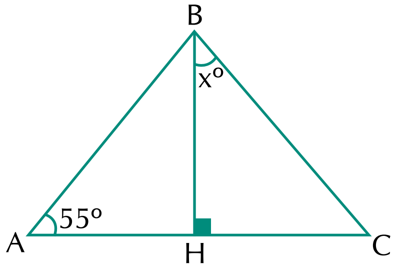
6. Del gráfico mostrado, $\overline{QM}$ es bisectriz del ángulo PQR, calcule "θ".



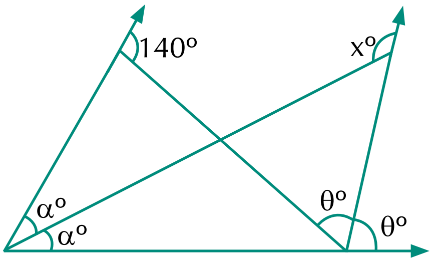
7. Del gráfico mostrado, calcule "x", si $\overline{AQ}$ y $\overline{CP}$ son alturas.



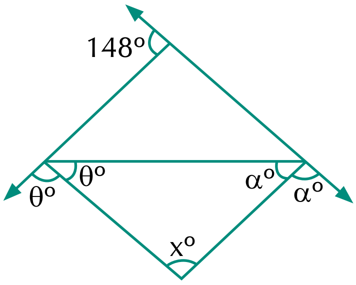
8. En el triángulo ABC mostrado: AB = BC. Calcule "x".



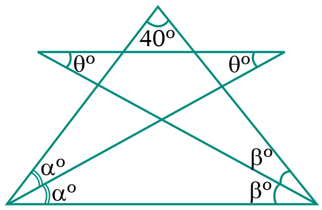
9. Calcule "x" de la figura mostrada.



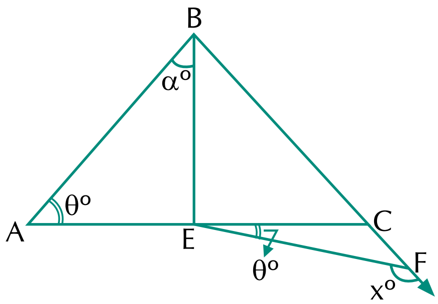
10. Del gráfico mostrado, calcule "x".



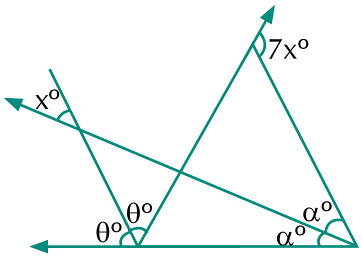
11. Del gráfico mostrado, calcule "θ".



12. Calcule "x", si: $\alpha° + \theta° = 80°$ y $\overline{BE}$ es bisectriz interior en el triángulo ABC.

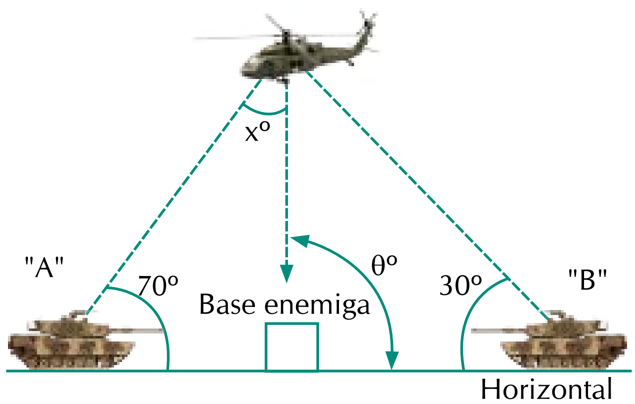


13. Del gráfico mostrado, calcule "x".



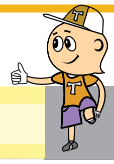
Aplicación cotidiana

Un helicóptero viaja en paralelo a la horizontal. En un determinado momento lanza un cohete al tanque "A" y otro al tanque "B".



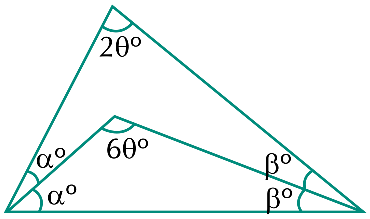
14. Si al lanzar un cohete a la base enemiga, la trayectoria del cohete resulta ser una bisectriz interior, calcule "x".

15. De acuerdo a los datos proporcionados, calcule "θ".

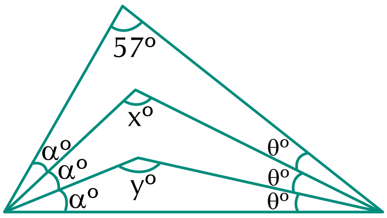


¡Tú puedes!

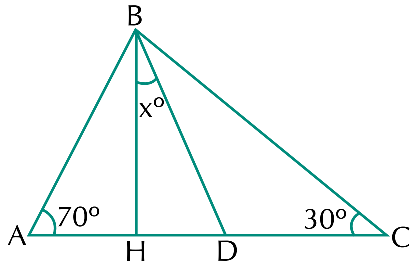
1. En el gráfico mostrado, calcule "θ".



2. Del gráfico mostrado, calcule "x + y"



3. En el gráfico mostrado, si $\overline{BH}$ es altura y $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC, calcule "x".

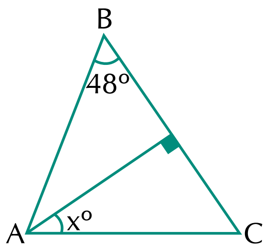


4. En un triángulo rectángulo ABC, se trazan la altura $\overline{BH}$ y la bisectriz interior $\overline{AF}$ que se intersectan en "M". Si: BH = 9 u y BF = 6 u, calcule "MH".

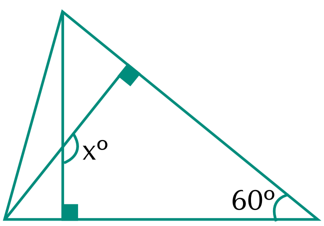
5. En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{AD}$, tal que la medida del ángulo ADC es igual a la semisuma de los ángulos interiores "A" y "B". Calcule "DB", si además: AC = 12 cm y BC = 16 cm.

Practica en casa

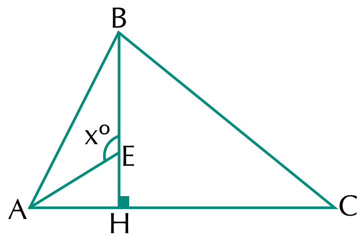
1. Si: AB = BC, calcule "x".



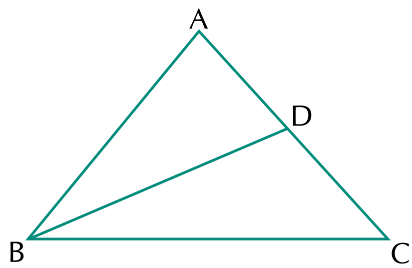
2. Calcule "x".



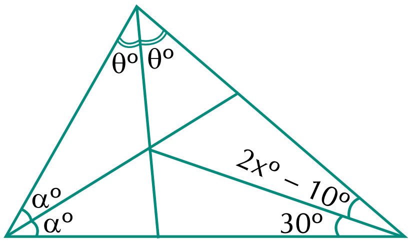
3. Si $\overline{AE}$ es bisectriz del ángulo BAH, m∢C = 40º y m∢B = 60º, calcule "x".



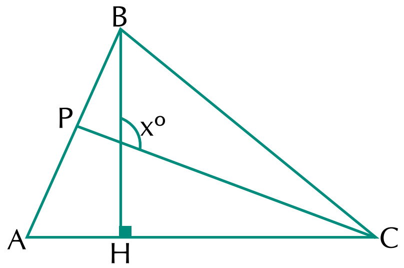
4. Si: AB = AC, AD = DB y $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC, calcule la m∢DCB.



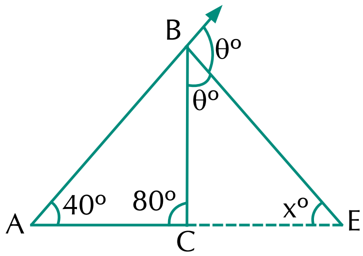
5. Del gráfico mostrado, calcule "x"



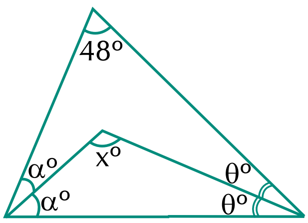
6. Si $\overline{BH}$ es altura y $\overline{CP}$ es bisectriz interior del ángulo "C", calcule "x", si además: m∢C = 50º.



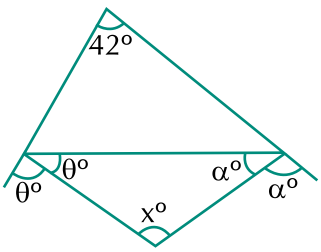
7. En el gráfico mostrado, $\overline{BE}$ es bisectriz exterior del ángulo "B", calcule "x".



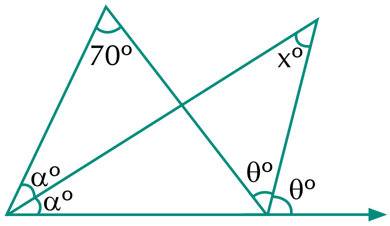
8. Calcule "x".



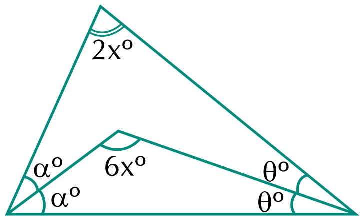
9. Del gráfico mostrado, calcule "x".



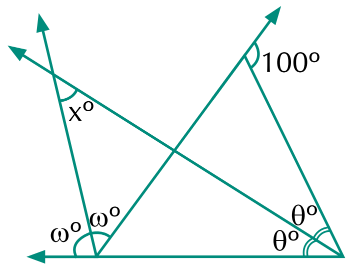
10. Del gráfico mostrado, calcule "x".



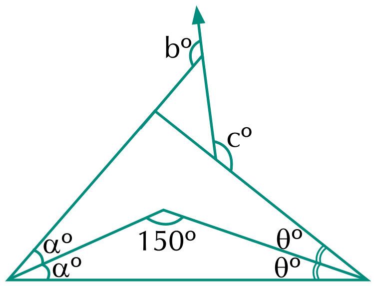
11. Del gráfico mostrado, calcule "x".



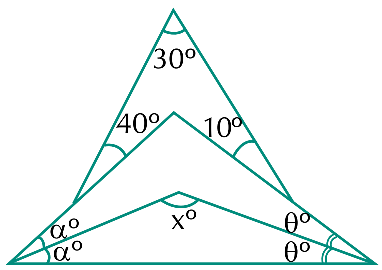
12. Calcule "x".



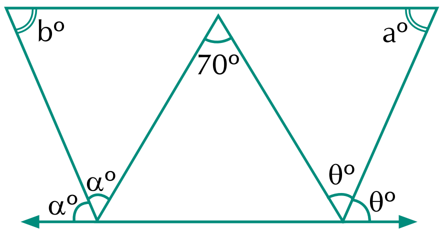
13. Calcule "b + c".



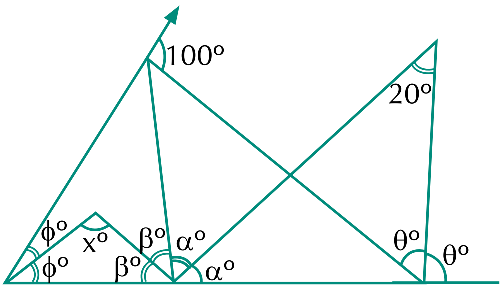
14. Del gráfico mostrado, calcule "x".



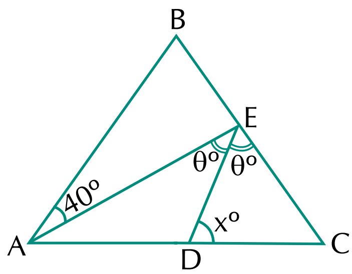
15. Del gráfico mostrado, calcule "a + b".



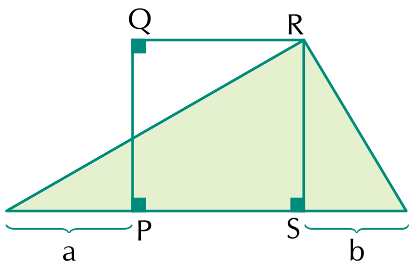
16. Del gráfico, calcule "x".



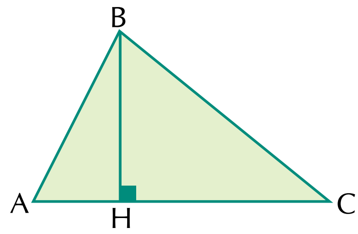
17. Del gráfico, AB = BC, calcule "x".



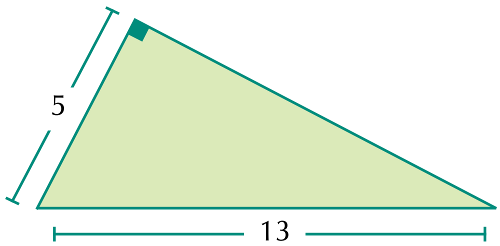
18. Del gráfico, calcule el área de la región sombreada, si: a + b = 4 m. (PQRS es un cuadrado de lado 6 m).



19. Del gráfico, AC = 3BH y su área es $6m^2$.Calcule "AC".



20. Del gráfico, calcule el área de la región sombreada.



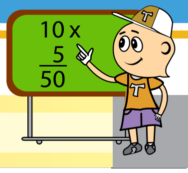
Repaso

En este capítulo aprenderemos:

- A reconocer las propiedades dadas en los capítulos anteriores.
- A identificar los tipos de ángulos y triángulos que existen.
- A formular estrategias para resolver ejercicios.

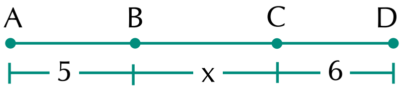
http://vidateleco.wordpress.com/2009/04/20/carlos-blanco-y-las-herramientas-de-calculo/

El astrolabio es considerado el "rey de los instrumentos de cálculo". De origen griego, el Astrolabio alcanzó mayor fama, por así decirlo, entre los árabes y, más tarde, entre los europeos y sobrevivió durante muchos siglos. Es un instrumento basado en una parte delantera que permite saber la parte del mundo en la que nos encontramos y qué hora es, una pieza llamada araña o red que gira sobre esta placa madre y que sitúa el Sol en el cielo, y las agujas: una para el Sol y otra para la hora.
Este instrumento era usado, efectivamente, para saber qué hora es y la posición del Sol en el cielo.Y hay que decir que es bastante preciso, además de una pieza de artesanía increíble.

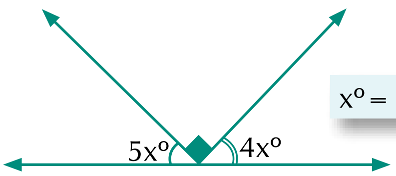


Aplica lo comprendido

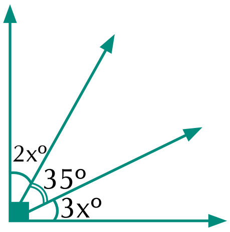
1. Del gráfico, calcule "BC", si: $AC+BD=19$



2. Del gráfico, calcule "x" en cada caso.

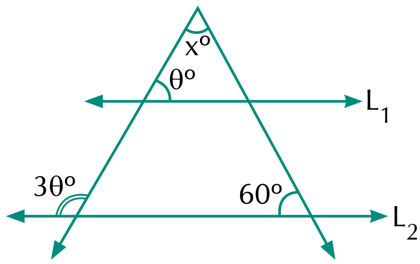
- 

  $x^o =$

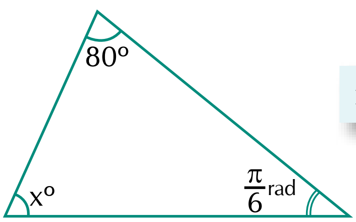
- 

  $x^o =$

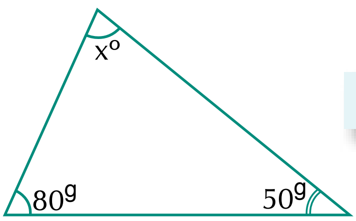
3. Del gráfico mostrado, calcule "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



4. Del gráfico mostrado, calcule "x", en el sistema sexagesimal en cada caso.

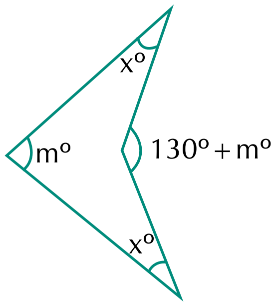
- 

  $x^o =$

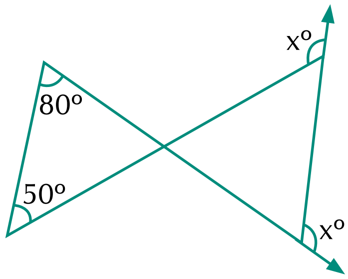
- 

  $x^o =$

5. Del gráfico mostrado, calcule "x" en cada caso.

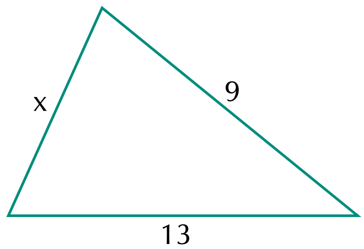
- 

  $x^o =$

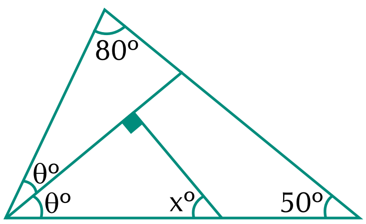
- 

  $x^o =$

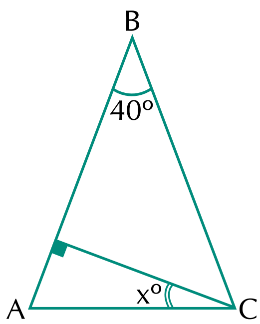
6. Del gráfico mostrado, calcule la suma del máximo y mínimo valor entero de "x" para que el triángulo exista.



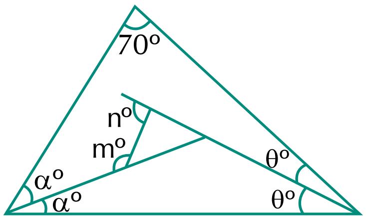
7. Del gráfico, calcule "x".



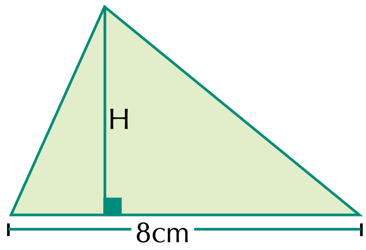
8. Del gráfico, calcule "x", si : $AB=BC$.

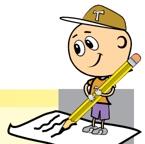


9. Del gráfico, calcule "m + n".



10. Del gráfico, calcule "H", si el área de la región sombreada es 48 cm^2.

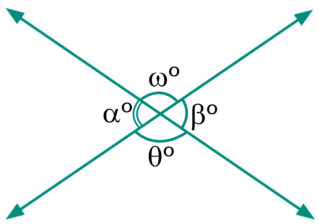




Aprende más...

Comunicación matemática

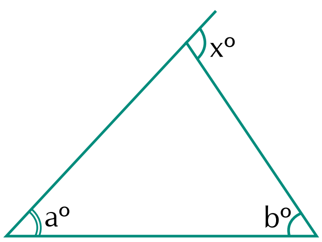
1. Indicar si es verdadero (V) o falso (F) en el siguiente gráfico.



- Los ángulos "ω°" y "θ°" miden lo mismo .... (   )
- Los ángulos "α°" y "β°" miden lo mismo .... (   )

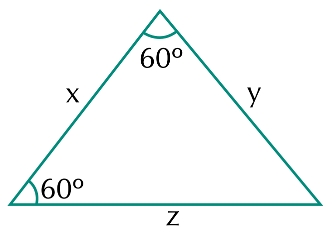
2. Completar la relación correcta en cada gráfico.

•



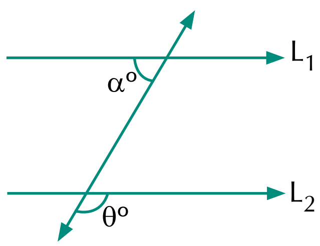
x° = ... + ...

•



x = ... = ...

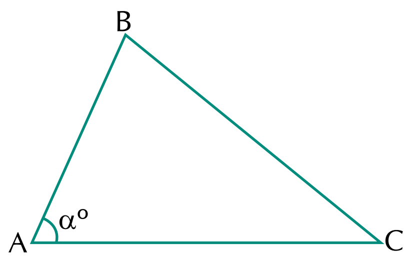
•



Si: $\overrightarrow{L_1} // \overrightarrow{L_2}$

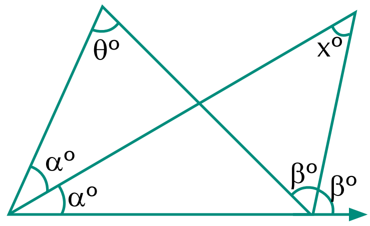
α° + θ° = ...

- Si el triángulo ABC es acutángulo



α° < ....

•



$x^\circ = \frac{\quad}{2}$

3. Completa el mapa conceptual

Sistema de medidas angulares

1 vuelta

Sistema ....
1 vuelta es ....°.

Sistema................................
1 vuelta es ....^{g}.

Sistema ....
1 vuelta es .... rad.

4. Indicar si es verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

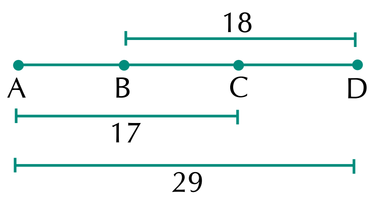
- La altura siempre parte de un vértice ....( )
- En el sistema centesimal, la suma de los ángulos internos de un triángulo es 200^g .....( )
- Solo en el triángulo rectángulo hablamos de hipotenusa ....( )

5. Graficar con regla.

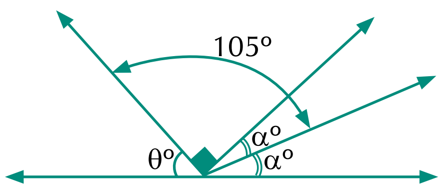
- Graficar un triángulo ABC y trace las bisectrices interiores de los ángulos "A" y "C" que se cortan en "I". Además: $m\measuredangle ABC = \theta^\circ$
- Graficar un triángulo PQR y trace la bisectriz interior $\overline{QM}$ y la altura $\overline{PN}$ que se cortan en "S". Sombrea el triángulo PSM.

Resolución de problemas

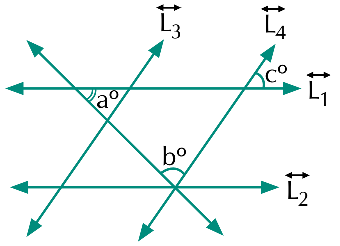
6. Del gráfico, calcule "BC".



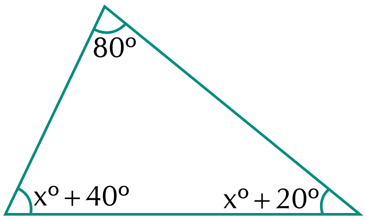
7. Del gráfico, calcule "θ".



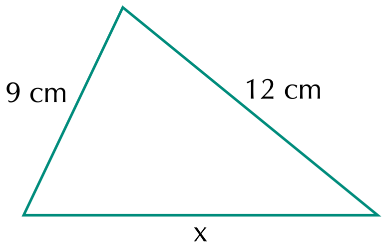
8. Del gráfico: $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3} \,//\, \overleftrightarrow{L_4}$.
Calcule "a + b + c".



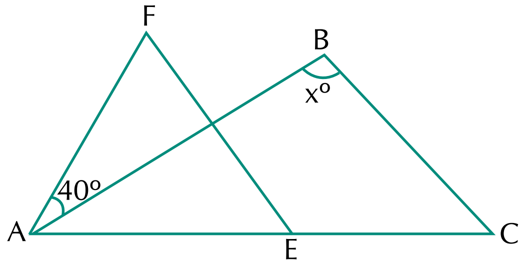
9. Del gráfico, calcule el suplemento de "x".



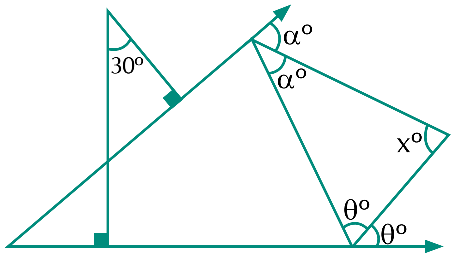
10. Del gráfico, calcule la suma de todos los valores enteros pares que adopta el tercer lado "x".



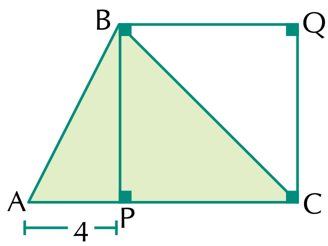
11. El triángulo FEA es equilátero y AB = BC. Calcule "x".



12. Del gráfico, calcule "x".

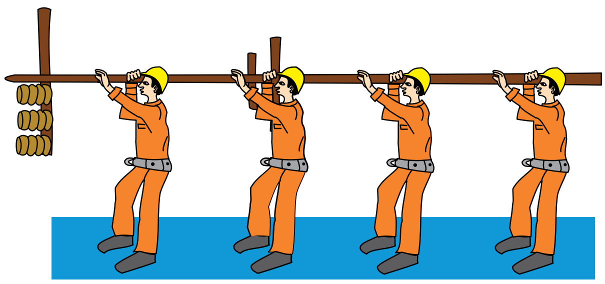


13. En el gráfico mostrado, PBQC es un cuadrado de lado 6 cm, calcular el área de la región sombreada.



Aplicación cotidiana

El poste de luz
Un poste de luz es transportado por cuatro robustos profesores: Julio, Rubén, Alfredo y Eduardo; Julio y Rubén se encuentran en los extremos y Alfredo está al costado de Julio como indica la figura.

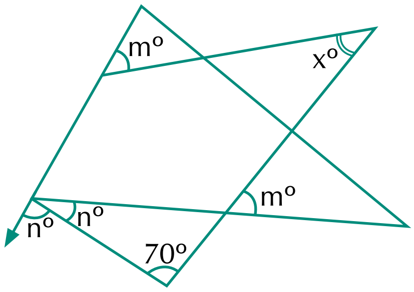


14. Si la distancia entre Julio y Eduardo es de 8m y la distancia entre Alfredo y Rubén es de 7m, calcule la distancia entre Alfredo y Eduardo, si el poste mide 10m.

15. Si en un momento, Alfredo se retira con las condiciones anteriores, calcule la distancia entre Eduardo y Rubén.

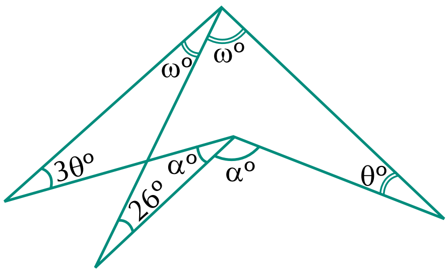
¡Tú puedes!

1. Del gráfico, calcule "x"

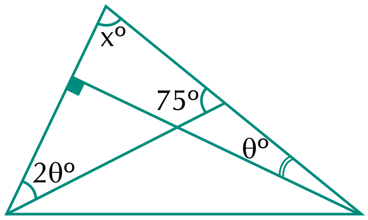


2. En una recta se ubican los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D" tal que "B" es punto medio de $\overline{AD}$ y AC = 5(CD). Calcular: $\dfrac{BC}{CD}$.

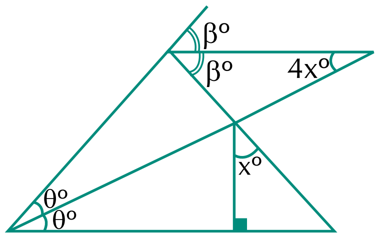
3. Del gráfico, calcule "θ".



4. Calcule "x".

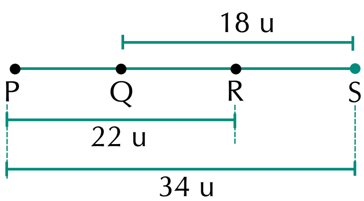


5. Del gráfico, calcule "x".



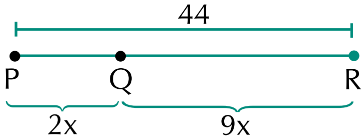
Practica en casa

1. Calcule "PM", siendo "M" punto medio de $\overline{QR}$.

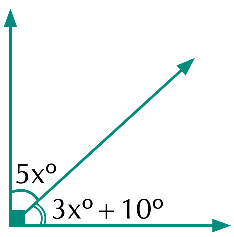


2. En una recta se tienen los puntos consecutivos "A", "B", "C" y "D". Calcule "AD", sabiendo que: AC = 8 + CD. Además: $\dfrac{AB}{2} = \dfrac{BC}{3} = \dfrac{CD}{4}$.

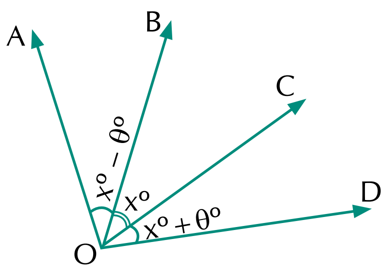
3. Calcule "x".



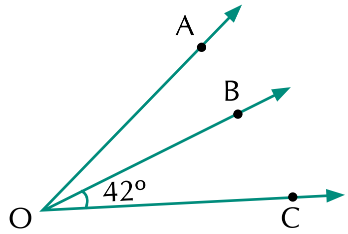
4. Calcule "x".



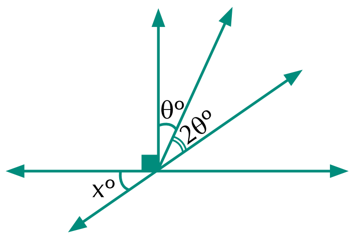
5. Calcule "x", si: m∢AOD = 144º.



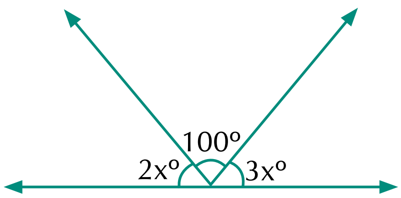
6. Si: m∢AOC = 4m∢AOB, calcule: m∢AOB.



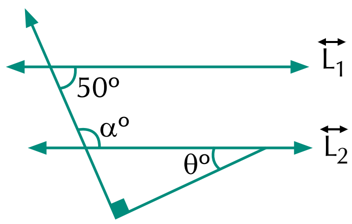
7. Calcule "x", si: $\theta° = 12°$.



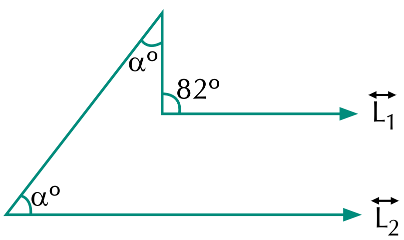
8. Calcule "x".



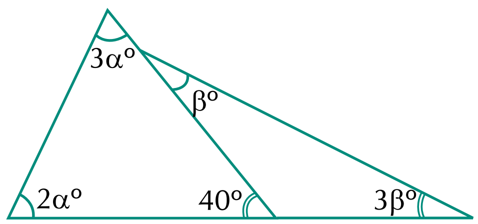
9. Del gráfico, calcule "θ", si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.



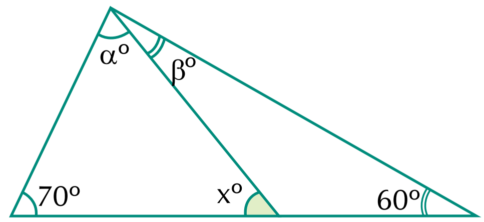
10. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcule "α°".



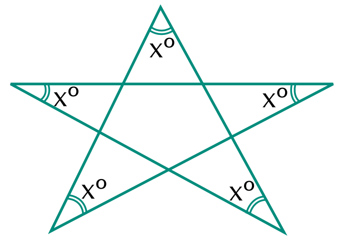
11. En el gráfico, calcule "α + β".



12. En el gráfico, "α" es a "β" como 3 es a 2. Calcule "x".

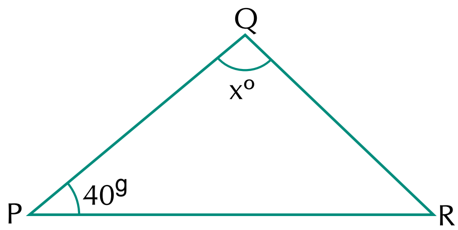


13. Del gráfico, calcule "x".

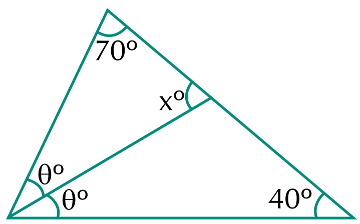


14. Convertir 50^g a grados sexagesimales.

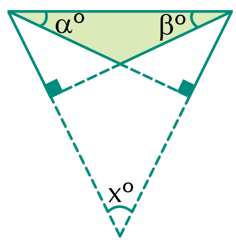
15. En el gráfico: PQ = QR, calcule "x", en el sistema sexagesimal



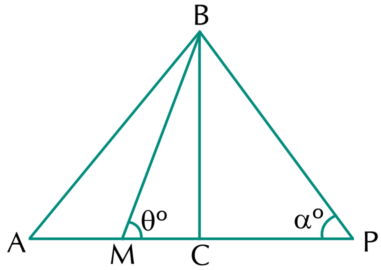
16. En el gráfico, calcule "x".



17. En el gráfico, calcule "x", si: $\alpha° + \beta° = 46°$.

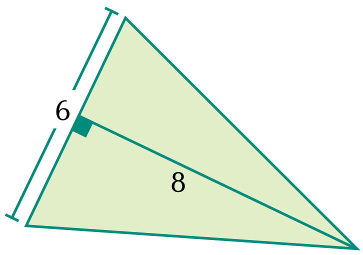


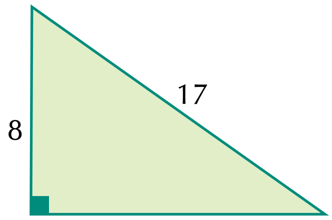
18. En el gráfico, calcule "$\alpha° + \theta°$", si $\overline{BM}$ es bisectriz interior del vértice "B" y $\overline{BP}$ es bisectriz exterior del vértice "B".

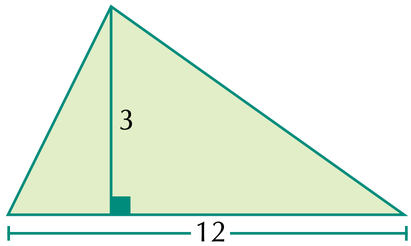


19. En un triángulo ABC: $m\measuredangle A + m\measuredangle C = 72°$. Calcule la medida del ángulo formado por las alturas trazadas de "A" y "C".

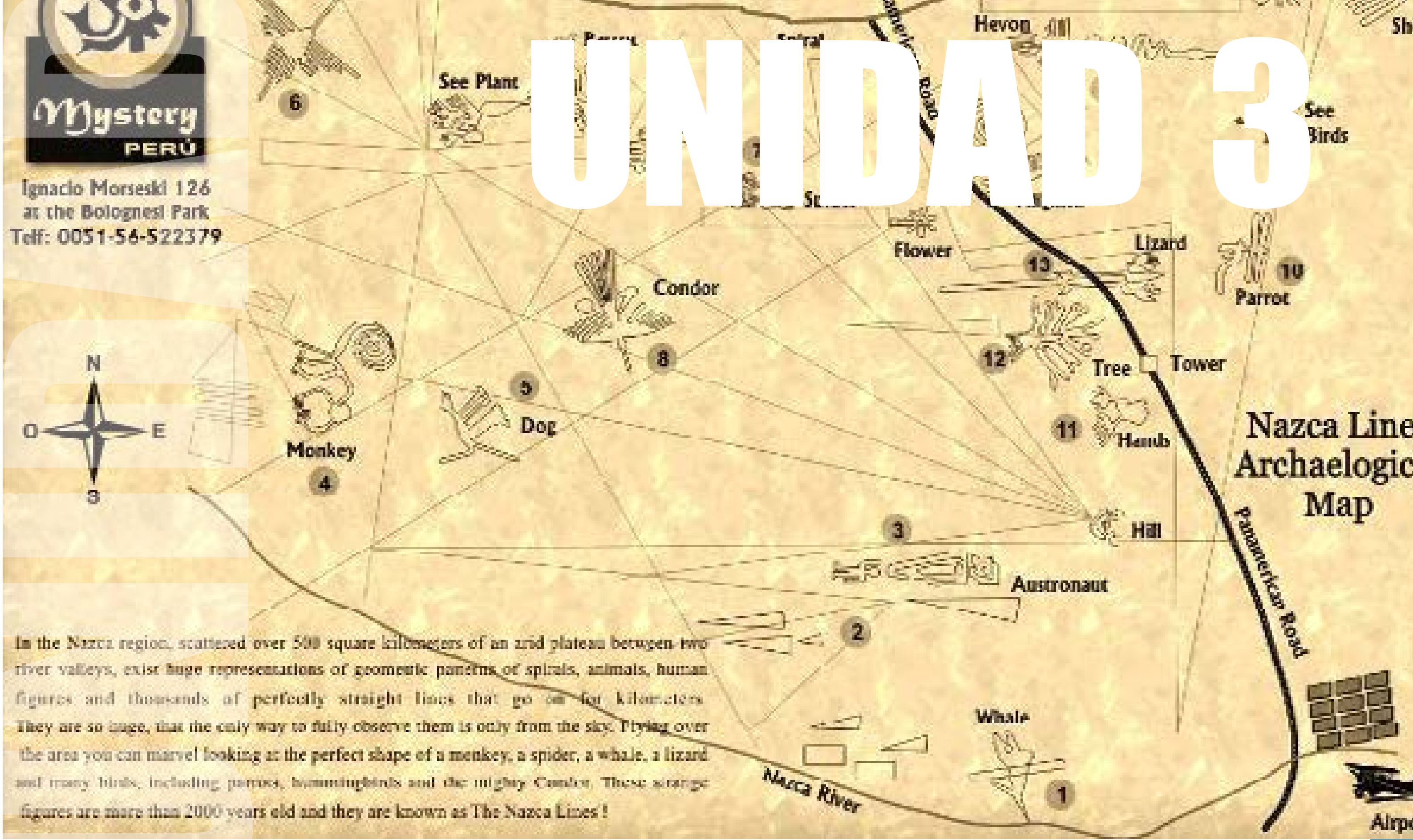
20. En el gráfico, calcule el área de la región sombreada en cada caso.

- 

- 

- 

UNIDAD 3



IMPORTANCIA DE LAS LÍNEAS EN EL TRIÁNGULO

Las imponentes líneas de Nazca (o geoglifos) fueron descubiertas en el árido desierto peruano en 1927 por el científico Paul Kosok.Al principio creyó que eran líneas talladas en la tierra de manera azarosa, pero al cabo de pocos días descubrió que cada línea formaba una gigantesca forma sobre el suelo desértico. Al investigar más detalladamente, Kosok se dió cuenta de que estas misteriosas líneas eran un enorme calendario astronómico de la cultura Nazca hace unos mil años aproximadamente. Las líneas de Nazca componen formas animales y geométricas. El tamaño varía radicalmente entre figura y figura; hay dibujos de 300 y 150 metros de área hasta pequeños espirales de tan solo 3 metros.Pero no solo el tamaño de cada geoglifo es impresionante, sino que la distancia entre figura y figura (unos 20km aproximadamente) también es causa de admiración,¿cómo podían hacer dibujos tan grandes y tan distantes sin perder la orientación, la simetría o la proporción? Según los científicos que estudiaron estos geoglifos, los constructores debían tener vastos conocimientos de la escala, proporción y pensamiento abstracto. Durante décadas, estos gigantescos geoglifos han sido uno de los grandes enigmas de la humanidad.

APRENDIZAJES ESPERADOS

Comunicación matemática

- Identificar los tipos básicos de triángulos (isósceles y equilátero).
- Interpretar las fórmulas de los ángulos en el triángulo.
- Establecer la diferencia entre las líneas notables.
- Reconocer su ubicación y sus propiedades.

Resolución de problemas

- Analizar y aplicar las propiedades de los triángulos en situaciones problemáticas.
- Reformular estrategias para la resolución de problemas sobre generalidades del triángulo.
- Identificar los casos de congruencias.

Líneas notables asociadas al triángulo II

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar y relacionar las líneas notables asociadas al triángulo.
- A analizar y aplicar las propiedades de las líneas notables asociadas al triángulo.

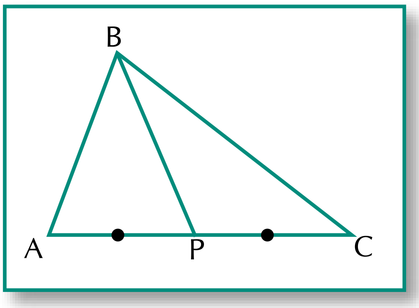
http://2.bp.blogspot.com

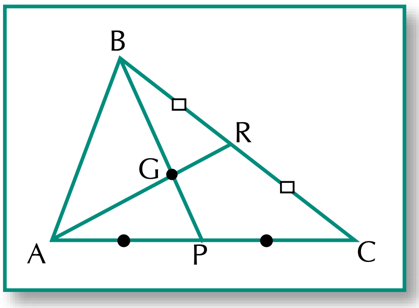
Llegué hasta este puente, ubicado en medio del Queen's College en Cambridge, atraído por la leyenda de que lo había construido nada menos que Sir Isaac Newton sin usar tuercas o pernos en las uniones. Posteriormente algunos estudiantes lo desarmaron e intentaron volverlo a armar, sin éxito, y esa es la razón por la que hoy se ve con grandes pernos en sus intersecciones
Sin embargo, este detalle no desmerece la belleza de este pequeño y grácil puente de madera, que cruza el río Cam (aquel que le dio nombre a esta famosa ciudad universitaria) para perderse al interior de un antiguo edificio de ladrillo.
Fue diseñado por William Etheridge y construido por James Essex quienes, por supuesto, consideraron el uso de turcas y pernos desde el inicio de la construcción. Fue reconstruido siguiendo el mismo diseño en 1866 y 1905.
El puente debe su nombre al revolucionario sistema estructural hecho con segmentos rectos de madera formando tangentes que conforman un arco, con miembros radiales que unen esas tangentes en una estructura triangular. Este sistema es muy eficiente y describe un arco relativamente bajo, sobre todo si se lo compara, por ejemplo, con los puentes de madera japoneses como el Kintai Kyo.

Conceptos básicos

Mediana

Es aquel segmento de recta que une un vértice con el punto medio de su lado opuesto.



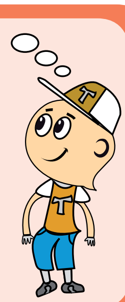


Propiedad: El punto de intersección de las tres medianas se denomina "Baricentro" y se representa con la letra "G".

$AP = PC$, $BR = RC$; $BG = 2[GP]$, $AG = 2[GR]$

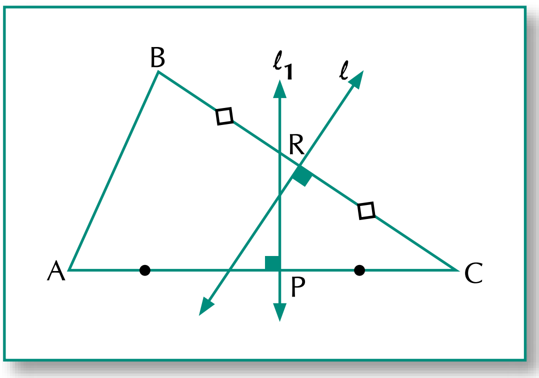
Recuerda que...

Recordar que el baricentro corta a la mediana en dos segmentos en proporción de 1 a 2, siendo la parte mayor hacia el vértice y la menor hacia el lado.



Mediatriz

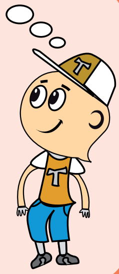
Es la recta perpendicular a un lado del triángulo y lo biseca.



Propiedades: $\overline{AP} \cong \overline{PC}$, $\overline{BR} \cong \overline{RC}$

Recuerda que...

Recordar que la mediatriz es una recta y es siempre perpendicular al lado desde el cual se traza y divide a este lado en segmentos congruentes.

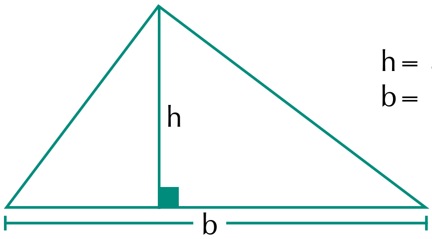


Áreas

Teoría: Áreas de regiones triangulares.

Área: El área de una región plana es la medida de la extensión de dicha región.

Áreas de regiones triangulares

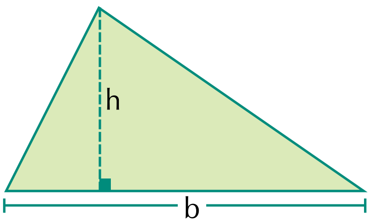


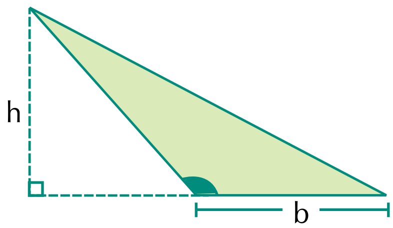
h = altura
b = base

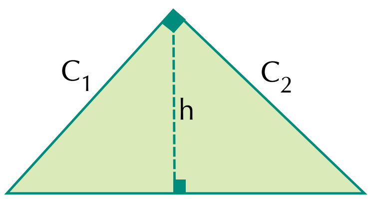
$$\text{Área} = \frac{b \times h}{2}$$

Recuerda que...

La altura y la base siempre forman un ángulo de 90°, cualquiera sea la forma del triángulo.



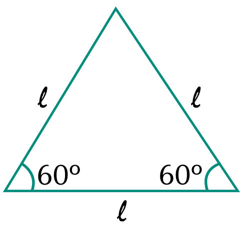




$$A = \frac{b \times h}{2}$$

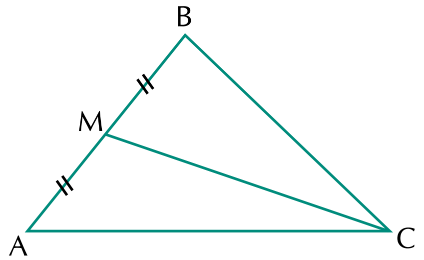
$$A = \frac{C_1 \times C_2}{2}$$

Caso especial

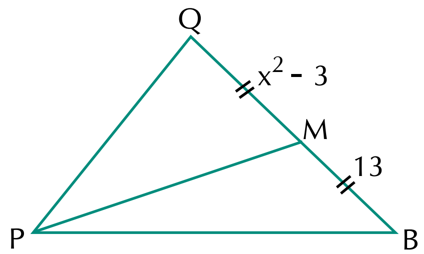


$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\ \mu^2$$

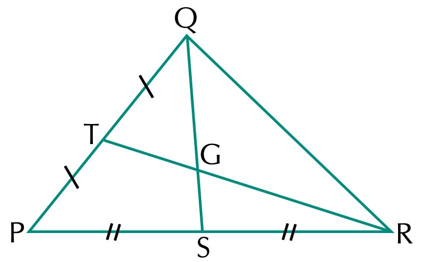
1. Del gráfico, calcule: $\frac{BM}{BA}$



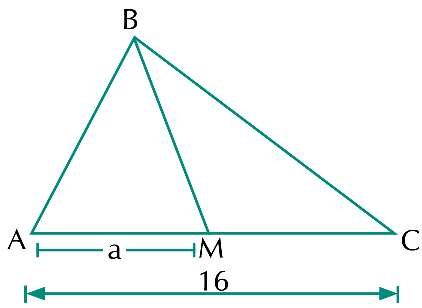
2. Del gráfico, calcule "x".



3. Del gráfico, calcule: $\frac{TG}{GR}$

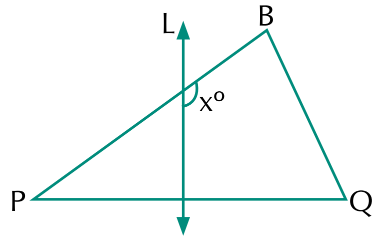


4. Si $\overline{BM}$ es mediana, calcule "a".

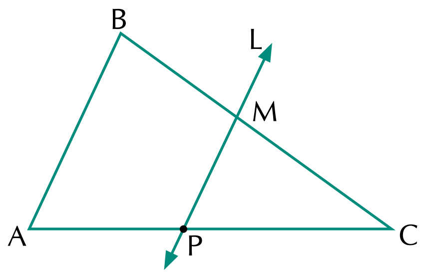


5. En el triángulo rectángulo de catetos 6 y 8 u, calcule la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa.

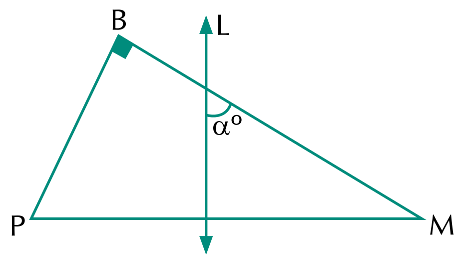
6. El triángulo BPQ es isósceles, además $m\measuredangle B = 70°$ y $PB = PQ$. Si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{PQ}$, calcule "x".



7. Si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{BC}$, calcule el valor del ángulo MPC, si: $m\measuredangle A = 60°$ y $m\measuredangle B = 80°$.



8. Si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{PM}$, calcule el valor del ángulo "α°", si: $m\measuredangle BPM = 20°$.



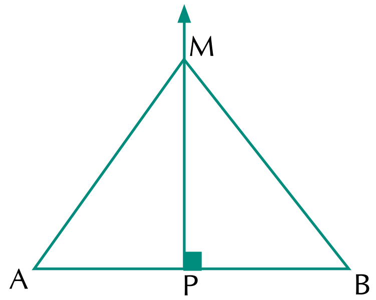
9. Calcule el área de una región triangular, si su base es la mitad de su altura y su altura mide 10 u.

10. Calcule el área de una región triangular, si su base mide 16 u y su altura mide 6 u.

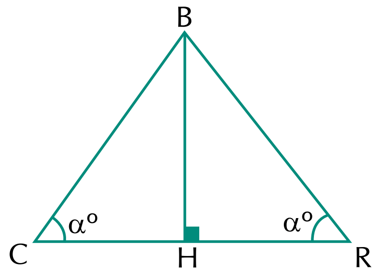
Aprende más...

Comunicación matemática

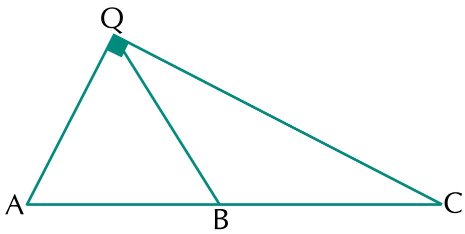
1. Si: $AP = PB \Rightarrow AM =$



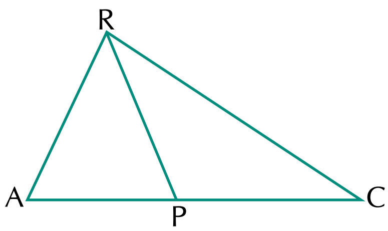
2. Si el ΔCBR es isósceles $\Rightarrow$ $CH =$ ....



3. Si $\overline{QB}$ es mediana $\Rightarrow$ $AB =$ .... = ...



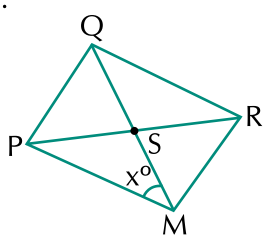
4. Si: $m\sphericalangle PRC = m\sphericalangle RCP = \alpha^o$ y $RP = AP \Rightarrow \overline{RP}$ es......................



Resolución de problemas

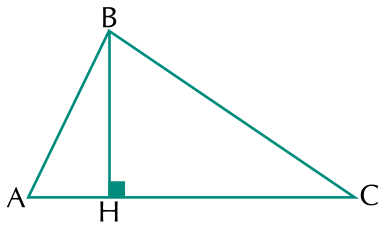
5. Calcule el mayor y menor valor entero de $\overline{AC}$, si: $PM = 6$ u y $PN = 4$ u. ABC es un triángulo donde $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ son medianas. ("P" es el punto de intersección de $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$).

6. Si $\overline{QS}$ es una mediana y el ΔMSR es equilátero, calcule "x".



7. En el ΔABC se traza la mediana $\overline{BM}$, tal que: $AB = 12$ u, $BC = 8$ u y el perímetro del triángulo ABC mide 38 u. Calcule "MC".

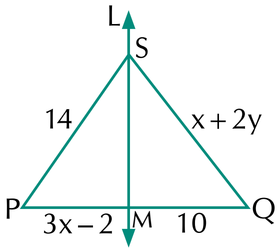
8. Si: $5(BH) = 4(BC)$ y el área del triángulo BHC vale 600 m^2, calcule "HC"



9. En el triángulo PMB, se traza la mediatriz $\overleftrightarrow{L}$ de $\overline{MB}$, que corta a $\overline{PB}$ en su punto medio. Si: $PM=\dfrac{PB}{2}$, calcule la medida del ángulo "P".

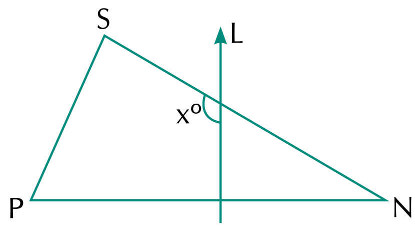
10. En el triángulo PBK, escaleno, la mediatriz del lado $\overline{PK}$ corta a este en "M" y a $\overline{BK}$ en "E". Si: $m\measuredangle PBK=57°$ y $m\measuredangle BKP=32°$, calcule la $m\measuredangle BPE$.

11. Si $\overleftrightarrow{L}$ es la mediatriz de $\overline{PQ}$, calcule: x.y



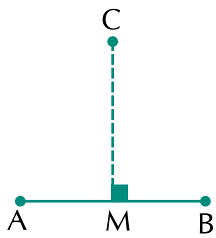
12. Si el lado de un triángulo equilátero es 8 u, calcule el área de su región triangular.

13. Del gráfico, calcule "x°", si: $m\measuredangle P=30°$ y $m\measuredangle S=130°$. Además: $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{PN}$.

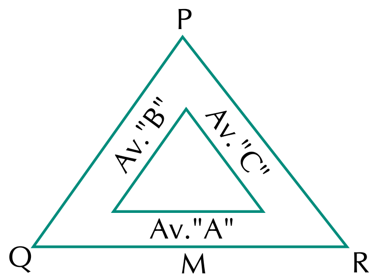


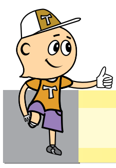
Aplicación cotidiana

14. Se quiere ubicar un poste de luz "C" equidistante de las calles "A" y "B". Si "M" es el punto medio de "A" y "B" y $AC=x+6$; $BC=2x-8$, calcule la distancia entre "A" y "C".



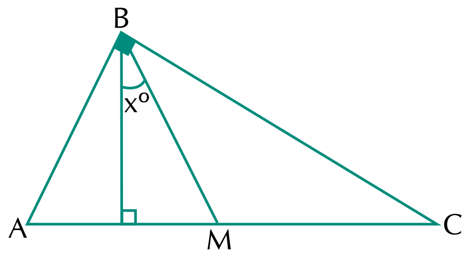
15. Se quiere ubicar un poste "M" entre las tres avenidas. Sabiendo que el parque tiene forma triangular equilátera, cuya mediana $\overline{PM}$ mide 30m, ¿a qué distancia de "R" se debe de colocar el poste?



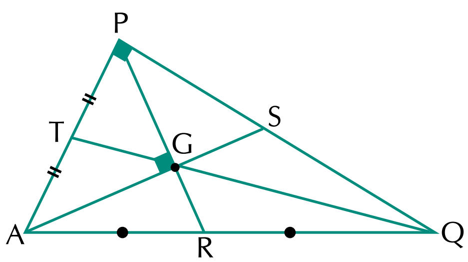


¡Tú puedes!

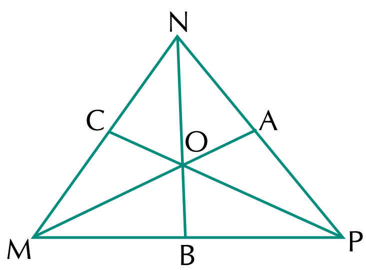
1. En la figura, si: $m\measuredangle A - m\measuredangle C=50°$, calcule "x". Además: $AM=MC$



2. Calcule "GT", en el siguiente gráfico, si: $GS=3$ u y $GR=4$ u.



3. El ΔMNP es equilátero y $\overline{MA}$, $\overline{NB}$ y $\overline{PC}$ son medianas. Si: $OB=3$ u, calcular: $E=\dfrac{CO+OA}{OP}$

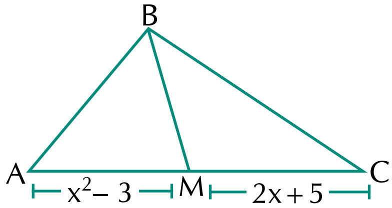


4. En un triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$, tal que: $m\measuredangle A=2m\measuredangle C$, $AH=8$ u y $HC=20$ u. Calcule "AB".

5. En un triángulo equilátero ABC se trazan las cevianas $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$. Si: $m\measuredangle ABD=m\measuredangle EAC$, calcule la medida del menor ángulo formado por dichas cevianas.

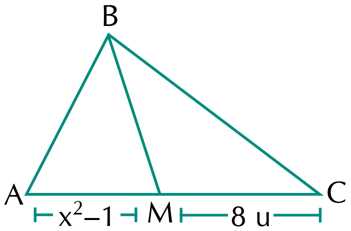
Practica en casa

1. Del gráfico, calcule "AC", si $\overline{BM}$ es mediana.



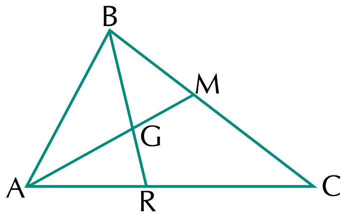
2. En el triángulo PQR, se traza la mediana $\overline{QM}$ tal que: PM = QM. Calcule: m∢PQR.

3. Calcule "x", si $\overline{BM}$ es mediana del triángulo ABC.

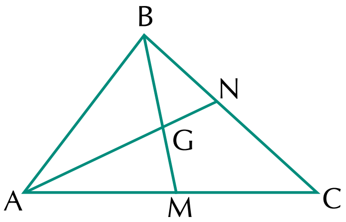


4. En un triángulo ABC, se trazan las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ que se interceptan en "K". Calcule "BN", si: KN = 8 u.

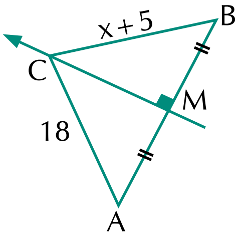
5. En el triángulo ABC, $\overline{AM}$ y $\overline{BR}$ son medianas. Calcule: $\dfrac{AG}{GM}$



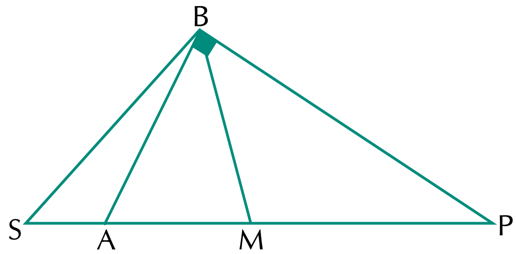
6. En el gráfico, $\overline{AN}$ y $\overline{BM}$ son medianas. ¿Cuántos valores enteros puede tomar "AB", si: MG = 4 u y GN = 5 u?



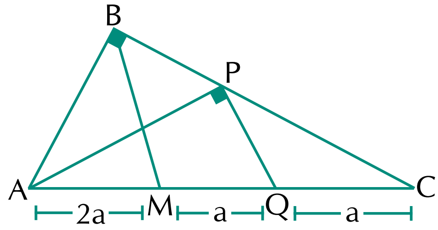
7. Calcule "x".



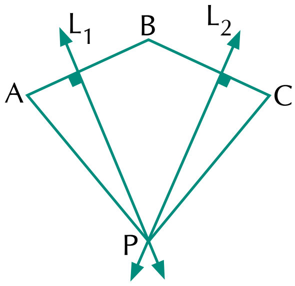
8. Si: m∢BSA = m∢BMA, SB = 8 u y $\overline{BM}$ es mediana, calcule "AP".



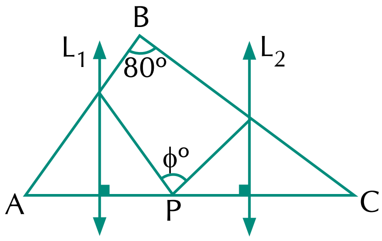
9. Si: BM = 8 u, calcule la mediana relativa a la hipotenusa del triángulo APQ.



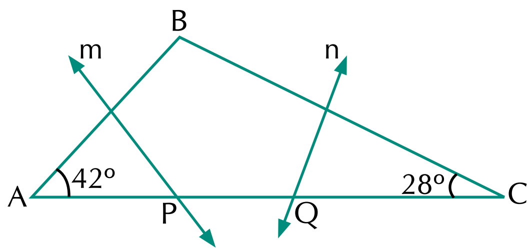
10. Calcule "PC", si: AP = 24 u y $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.



11. Calcule "ϕ°", si $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{PC}$.

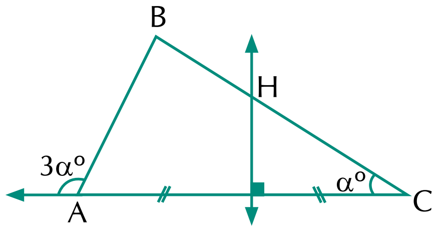


12. Calcule: m∢PBQ, si $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.



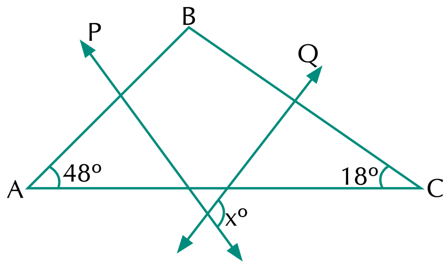
13. En un triángulo ABC, m∢ABC = 140°. Luego se trazan las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ que se cortan en "Q". Calcule: m∢QAC.

14. Calcule "AB", si: BC = 8 y BH = 3.

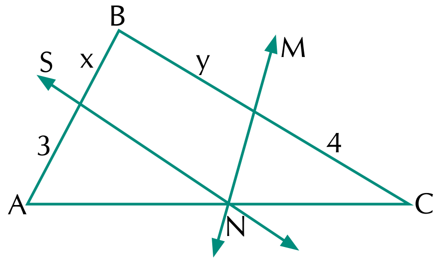


15. Graficar el triángulo ABC, con la mediatriz de $\overline{BC}$ que corta a $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ en "M" y "P" respectivamente. Calcule: m∢BPM, siendo: m∢BAC = 90° y m∢ACB = 62°.

16. Si $\overrightarrow{P}$ y $\overrightarrow{Q}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, hallar "x°".



17. Si $\overleftrightarrow{S}$ y $\overleftrightarrow{M}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, calcule: x + y.



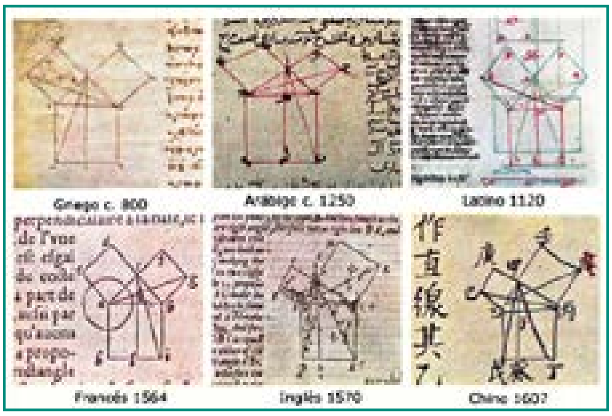
18. La base y la altura de una región triangular están en relación de 2 a 5. Si su área es de $50m^2$, ¿cuál es el valor de su altura?.

19. Si un cateto de un triángulo rectángulo es de 15 u y el otro cateto es el doble, calcule el área de la región triangular.

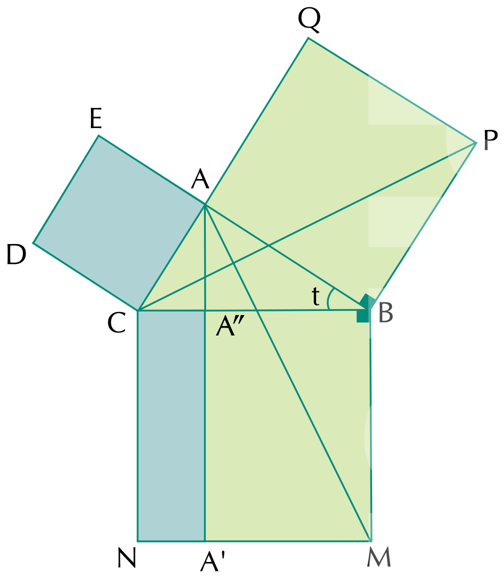
Triángulos rectángulos

En este capítulo aprenderemos:

- A establecer las relaciones entre los lados de los triángulos notables.
- A diferenciar los triángulos notables básicos.
- A identificar y relacionar los lados de los triángulos notables.
- A analizar y aplicar las relaciones de los lados de los triángulos notables.



Escrito antiguo: teorema de Pitágoras



Euclides, en el libro I de los elementos proposición 47 demuestra el teorema de Pitágoras: En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el ángulo opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo recto.

Prueba que el área del cuadrado NMBC es igual a la suma de las áreas de los cuadrados ABPQ y CAED.
Para ello, trazamos por A una perpendicular a $\overline{CB}$ hasta que corte a $\overline{NM}$ en A' y que divide al cuadrado NMBC en dos ángulos rectángulos A 'MBA'' y NA'A''C. A continuación unimos A con M y C con P.
Los triángulos MBA y CBP son iguales pues tienen el mismo ángulo "B = 90º + t" e iguales los lados que lo determinan (BP = AB y BM = BC).
Se verifica:

- [Área triángulo MBA] = 1/2 MB.MA = 1/2 (MB.MA) = 1/2 [Área rectángulo A' MBA''].
- Por otra parte:
  [Área triángulo CBP] = 1/2 BP.QP = 1/2 (BP.QP) = 1/2 [Área cuadrado BPQA].
- Por tanto:
  [Área triángulo MBA] = [Área triángulo BPC] = 1/2 [Área cuadrado BPQA] = 1/2 [Área rectángulo A'MBA''].

Es decir, el cuadrado BPQA y el rectángulo A'MBA'' son equivalentes. Análogamente demuestra que el rectángulo NA' A''C es equivalente al cuadrado CAED.

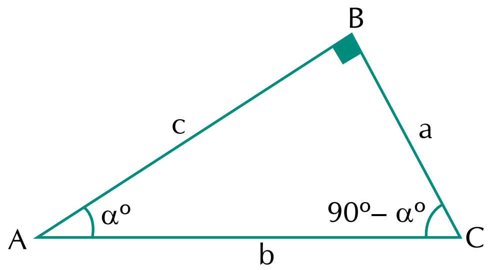
Conceptos básicos

Triángulos rectángulos

Es aquel triángulo en el cual un ángulo mide 90°.

Recuerda que...

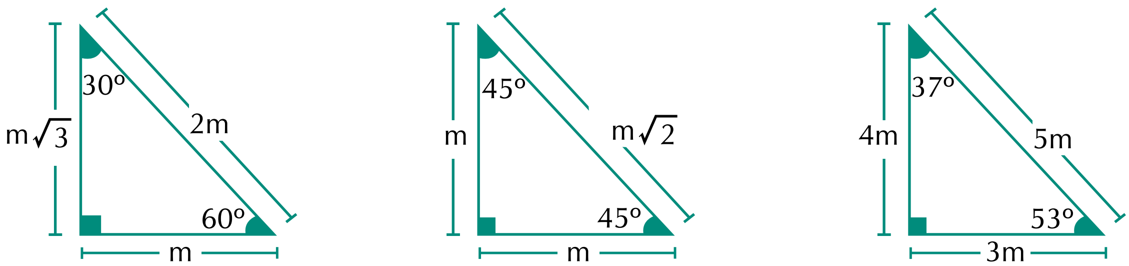
Solo en los triángulos rectángulos podemos aplicar: "El teorema de Pitágoras".



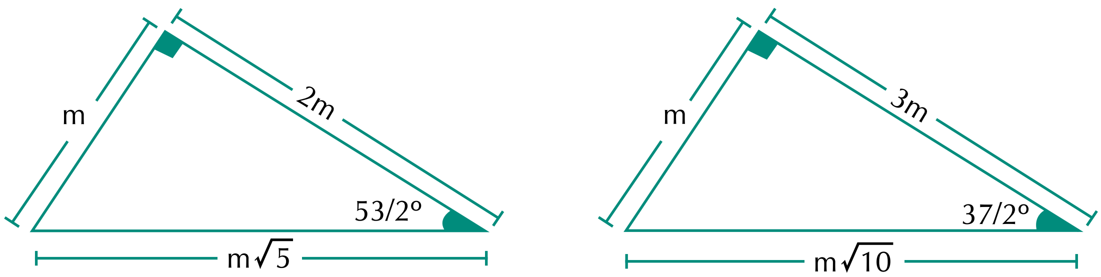
$$a^2 + c^2 = b^2$$

Triángulos notables

Se denominan así a ciertos triángulos rectángulos en los cuales conociendo las medidas de los ángulos internos se tendrá presente una determinada relación entre las longitudes de sus lados.



Del triángulo de 37º y 53º se deduce:

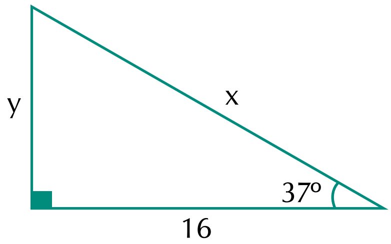


Recuerda que...

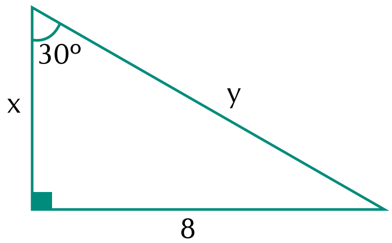
Solo existen dos triángulos notables de medidas exactas y son aquellos que se producen del triángulo equilátero y del cuadrado.

Aplica lo comprendido

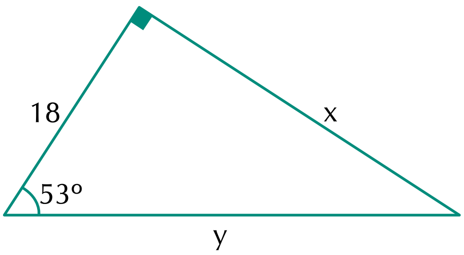
1. Del gráfico, calcule "x" e "y".



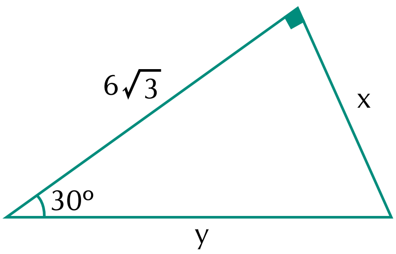
2. Del gráfico, calcule "x + y".



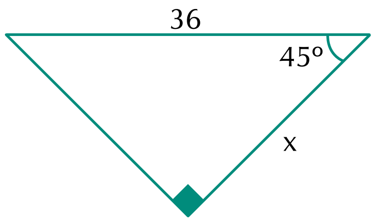
3. Del gráfico, calcule "x.y"



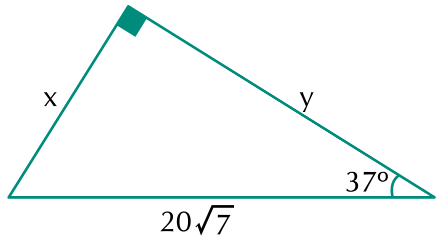
4. Del gráfico, calcule "$\frac{x}{y}$".



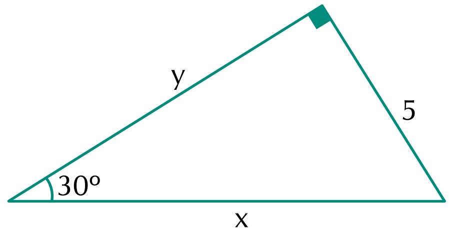
5. Del gráfico, calcule "x^2".



6. Del gráfico, calcule "$\frac{x}{y}$".



7. Del gráfico, calcule "x + y"



8. En el triángulo rectángulo ABC, recto en "B", $m\measuredangle C = 60°$. Si: $AC = 50$ u, calcule "AB".

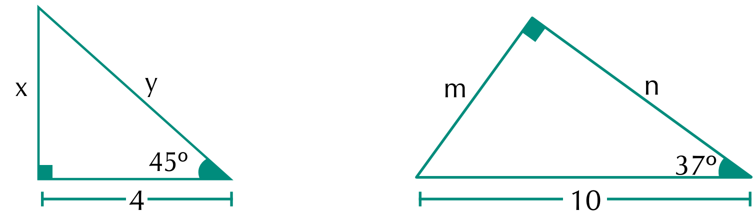
9. En el triángulo rectángulo PQR, recto en "Q", $m\measuredangle P = 53°$. Si: $PR = 250$ u, calcule: $PQ + QR$.

10. En el triángulo equilátero ABC, se traza la altura $\overline{AP}$. Si el perímetro del triángulo ABC es de 60 u, calcule "AP".

Aprende más...

Comunicación matemática

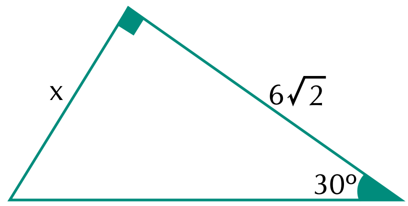
1. Dado los siguientes triángulos:



Indicar en cada caso, los valores de:

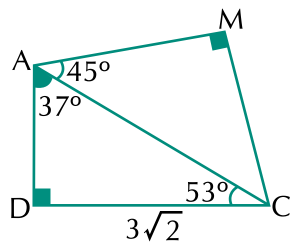
x = ... y = ... m = ... n = ...

2. En el siguiente triángulo, indicar verdadero (V) o falso (F)



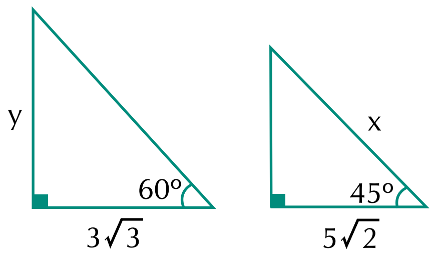
• $x = 2\sqrt{6}$ .... ( )

3. Indicar si es ">"; "<" ó "=" según corresponda.



AM .... DC

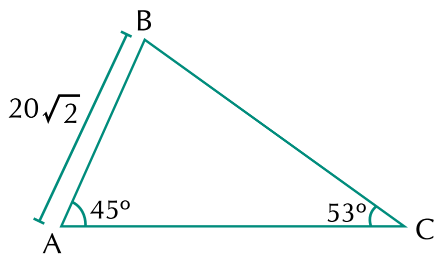
4. Indicar si es ">"; "<" ó "=" según corresponda.



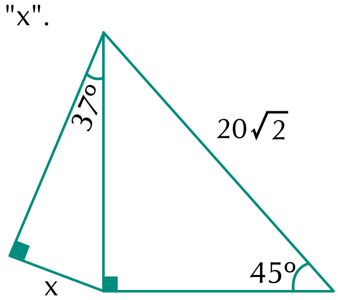
x .... y

Resolución de problemas

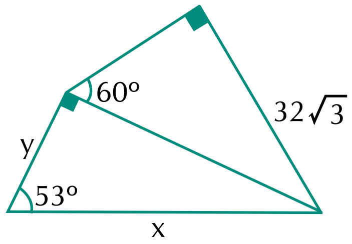
5. Del gráfico, calcule: AC.



6. Calcule "x".



7. Del gráfico, calcule "x + y".

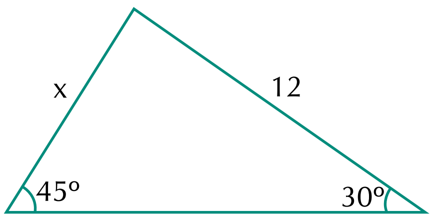


8. En el triángulo rectángulo ABC, recto en "B", $m\measuredangle A = 60º$ y $AB = 8$. Calcule: BC^2.

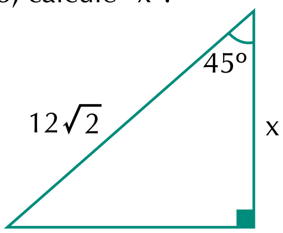
9. Dado el triángulo ABC: $m\measuredangle A = 45º$ y $m\measuredangle C = 37º$. Calcule "AC", si: $AB = 12\sqrt{2}$.

10. Dado el triángulo ABC, $m\measuredangle A = 30º$ y $m\measuredangle C = 45º$. Si: $AB = 18$ u, calcule "AC".

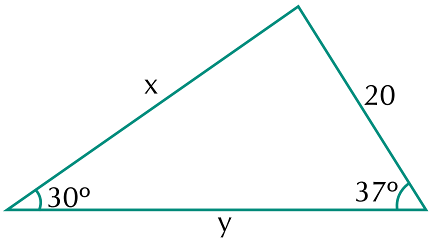
11. Del gráfico, calcule "x".



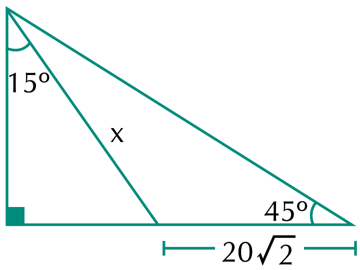
12. Del gráfico, calcule "x".



13. Del gráfico, calcule "x + y".

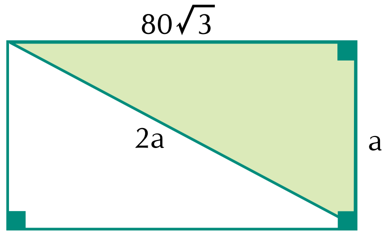


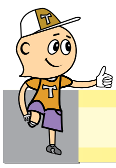
14. Del gráfico, calcule "x".



Aplicación cotidiana

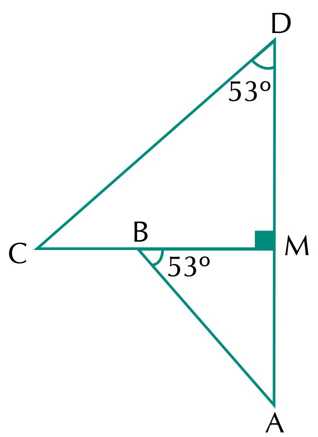
15. Calcule el perímetro de una cancha de fútbol, que tiene la forma de un rectángulo, donde la diagonal de la cancha es el doble de su ancho.





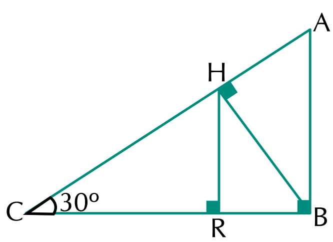
¡Tú puedes!

1. Calcule "BC", si: $AM = MD = 12$ u.



2. En un triángulo ABC: $m\measuredangle BAC = 37º$, $m\measuredangle ACB = 8º$ y $AC = 50$ u. Calcule "AB".

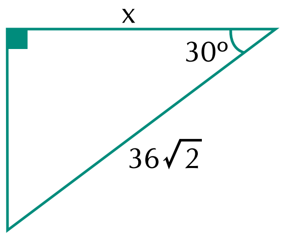
3. Calcule "HR", si: $AB = 20$ u.



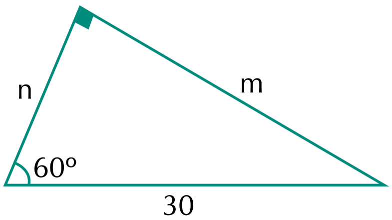
4. En un triángulo ABC: $m\measuredangle B = 127º$ y $BC = 15$ u. Calcule la distancia del vértice "C" a la recta $\overleftrightarrow{AB}$.

5. En un triángulo ABC: $m\measuredangle A = 37º$, $AB = 3$ u y $AC = 15$ u. Calcule: $m\measuredangle B$.

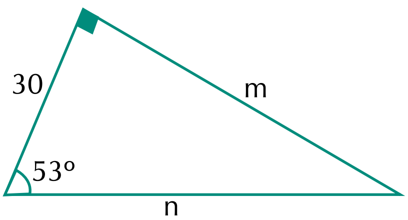
1. Calcule "x".



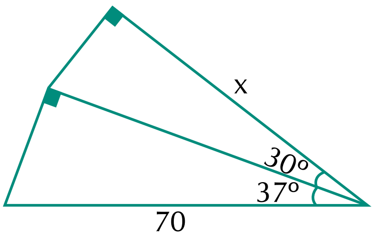
2. Calcule "m + n".



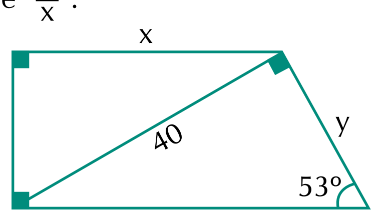
3. Calcule "$\frac{m}{n}$".



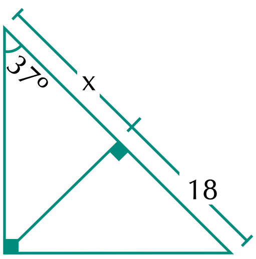
4. Calcule "x".



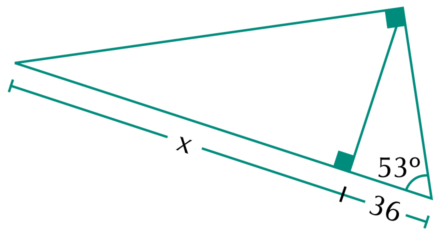
5. Calcule "$\frac{y}{x}$".



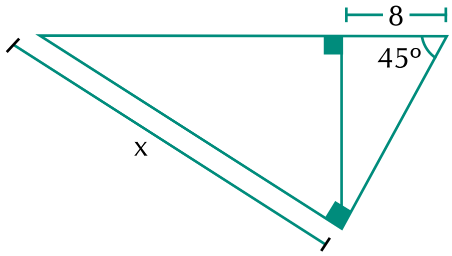
6. Calcule "x".



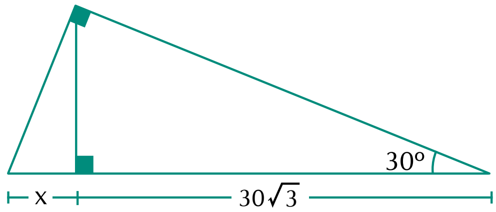
7. Calcule "x".



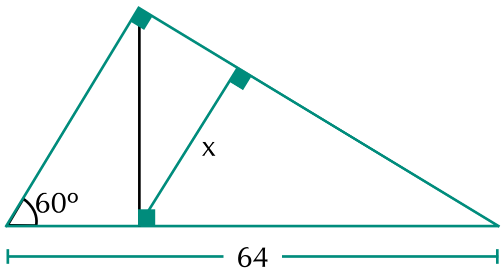
8. Calcule "x".



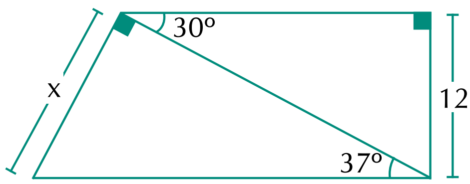
9. Calcule "x".



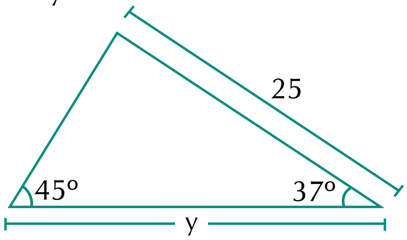
10. Calcule "x".



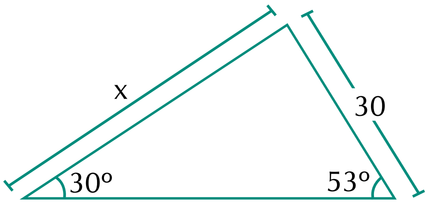
11. Calcule "x".



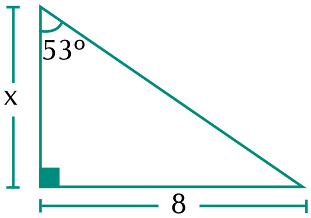
12. Calcule "y".



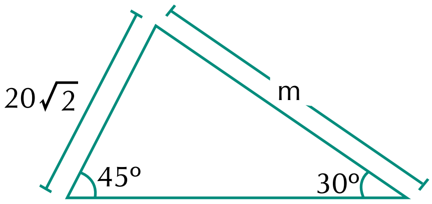
13. Calcule "x".



14. Calcule "x + 2".



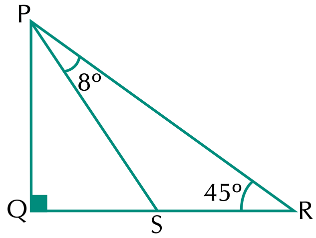
15. Calcule "m – 2".



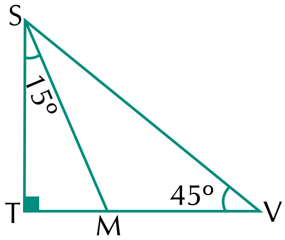
16. Dado el triángulo ABC: m∢A = 45° y m∢C = 53°. Si: AB = $40\sqrt{2}$, calcule "AC".

17. En el triángulo rectángulo PQR, recto en "Q", se traza la altura $\overline{QM}$. Si: PM = 18, calcule "MR", si además: m∢R = 30°.

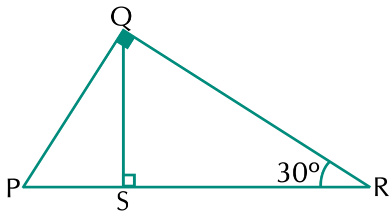
18. Calcule "QS", si: PR = $16\sqrt{2}$.



19. Calcule "SM", si: MV = 20.



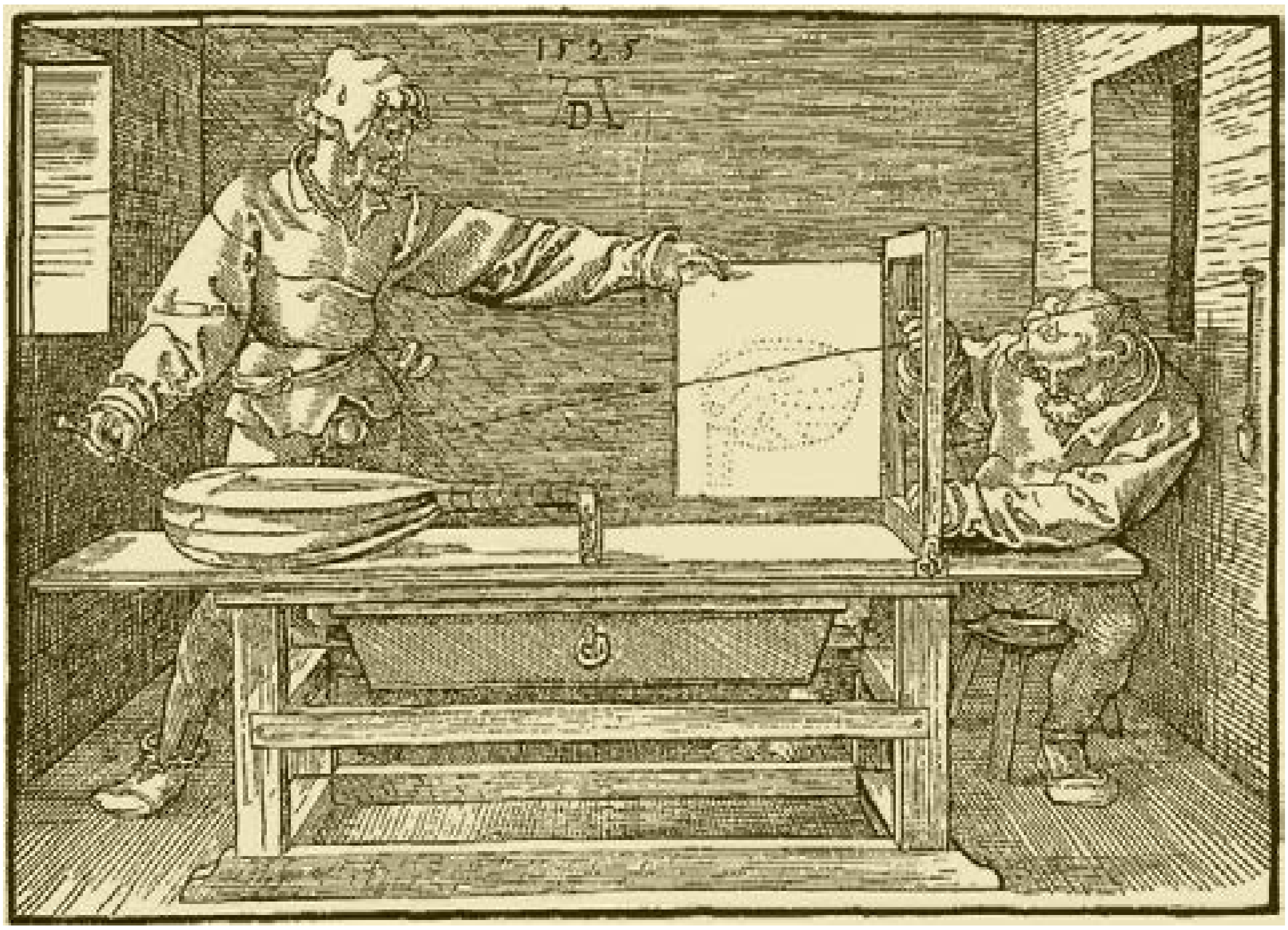
20. Calcule "QS", si: PR = 40.



Congruencia de triángulos

En este capítulo aprenderemos:

- A reconocer los tres casos de congruencia de triángulos.
- Analizar y aplicar los casos de congruencia de triángulos.



Tanto en Grecia como en Egipto, se emplearon diversos métodos para medir distancias y calcular alturas. Un método posible consistía en sujetar un palo con el brazo extendido hasta que cubriera con exactitud la altura del objeto. Se hacia girar después 90° y la distancia aparentemente cubierta sobre el suelo era la medida buscada.

A lo largo de la historia, los pueblos han inventado nuevas formas de resolver problemas cotidianos.

Así en el grabado, de Alberto Durero (1538), este gran artista alemán nos muestra uno de los variados grabados donde se ve el método de perspectiva práctica. En este grabado se aprecia como un artista puede copiar literalmente en papel cuadriculado la imagen que observa a través de los cuadrados de su cuadrícula y rejilla.

Ahora disponemos de máquinas y métodos extremadamente complejos para medir o reproducir imágenes, un ejemplo es la fotografía que reproduce imágenes todas congruentes o del tamaño que quisiéramos, o las fotocopiadoras que reproducen imágenes a tamaño real o a escala.

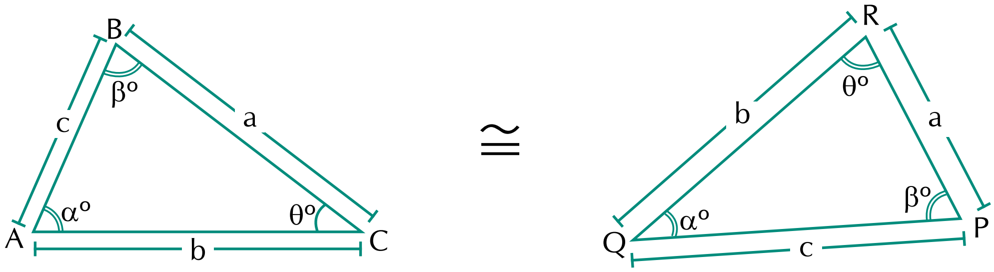
Actualmente, se constata que la congruencia, (reproducir objetos iguales), es una obsesión del hombre, cuya magnitud se distingue en la clonación de seres vivos.

Resulta interesante recordar que todas estas ideas de congruencia e igualdad tuvieron su origen en tiempos pasados ante el progreso del hombre.

Conceptos básicos

Definición

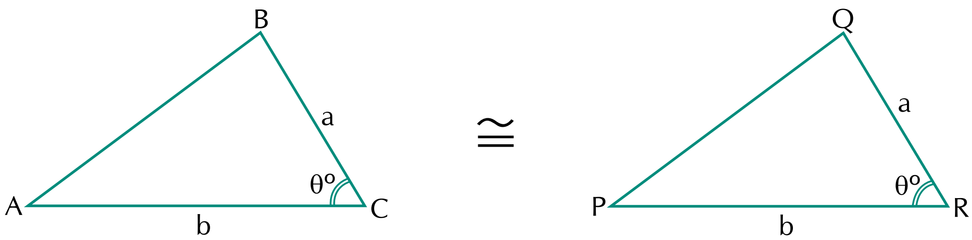
Un triángulo es congruente a otro triángulo, si sus lados correspondientes tienen igual longitud y sus ángulos correspondientes tienen igual medida.



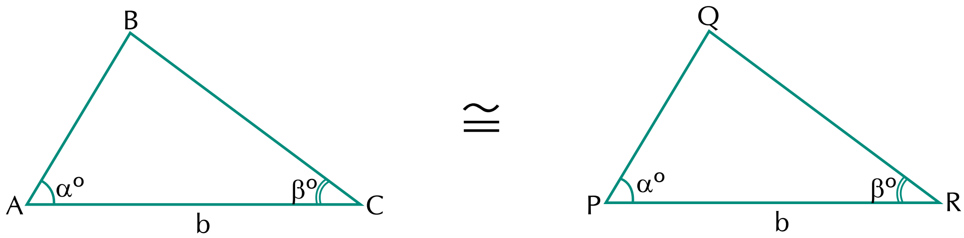
Notación: $\Delta ABC \cong \Delta QPR$

Casos de congruencia

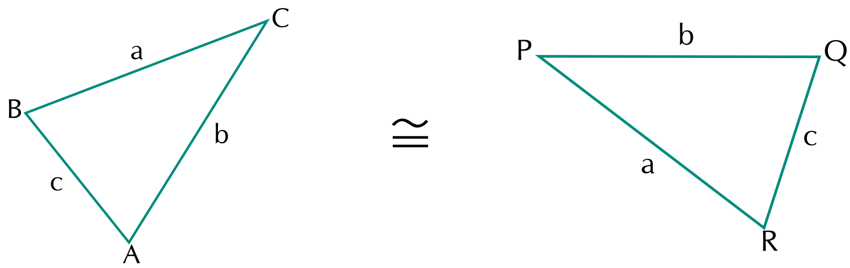
Lado – Ángulo – Lado (LAL)



Ángulo – Lado – Ángulo (ALA)

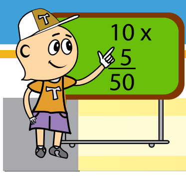


Lado – Lado – Lado (LLL)



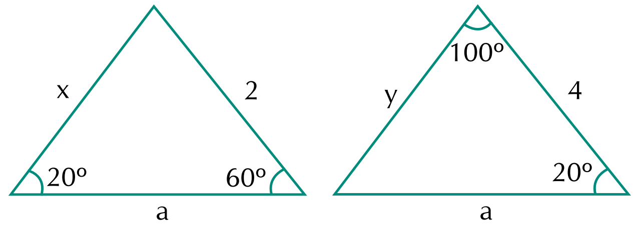
A - L - A	L - A - L	L - L - L

"Siempre hay un lado como dato"

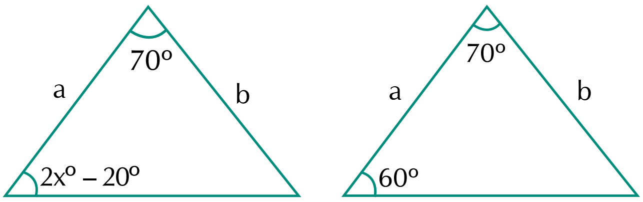


Aplica lo comprendido

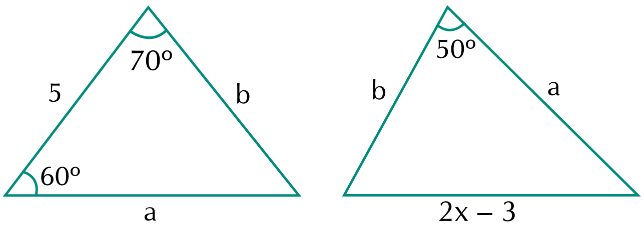
1. Calcule "x+y".



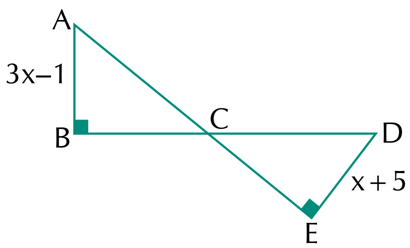
2. Calcule "x".



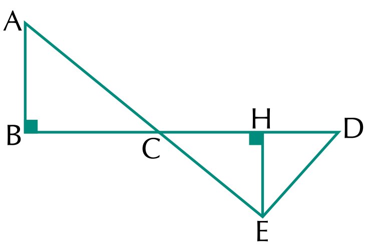
3. Calcule "x".



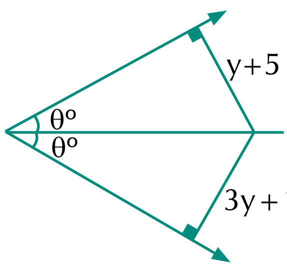
4. Calcule "x", si: AC=CD.



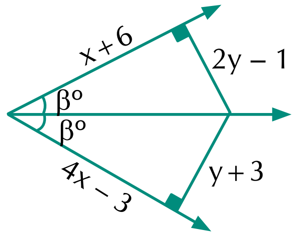
5. Calcule "HD", si: AC = CE, BC = 4 u y CD=7 u.



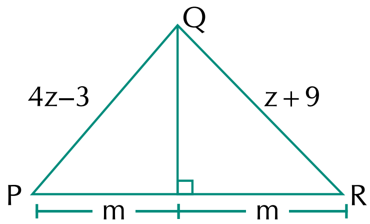
6. Calcule "y".



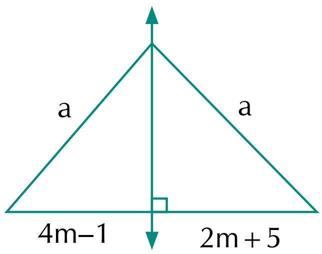
7. Calcule "x+y".



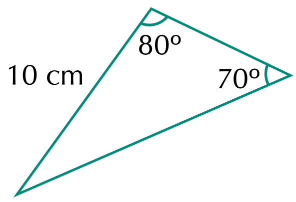
8. Calcule "z".

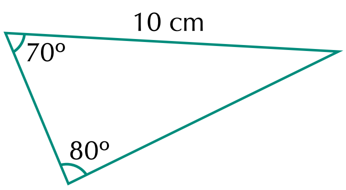


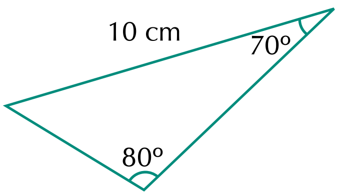
9. En la figura, calcule "m"



10. Dados los siguientes triángulos, determinar cuáles son congruentes.



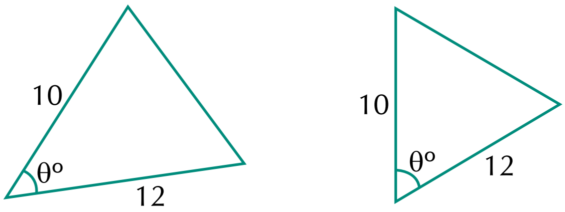




Aprende más...

Comunicación matemática

1. Graficar con un ejemplo el caso LLL.
2. Graficar con un ejemplo el caso LAL.
3. Graficar con un ejemplo el caso ALA.
4. Indicar el tipo de congruencia que hay en las siguientes figuras:

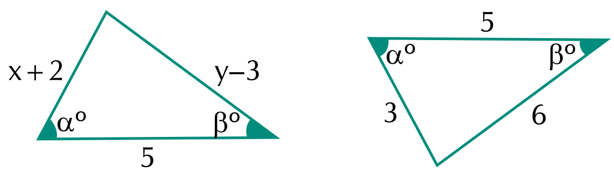


Resolución de problemas

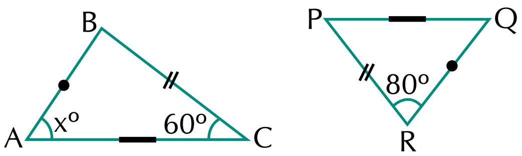
5. Marca la alternativa correcta de las proposiciones mostradas.

- Dos triángulos rectángulos son congruentes, si sus ángulos agudos respectivos son congruentes.
- Dos triángulos son congruentes, si sus ángulos respectivos son iguales.
- Para demostrar que dos triángulos son congruentes, se puede utilizar el criterio AAL.
- Todos los triángulos equiláteros son triángulos congruentes.

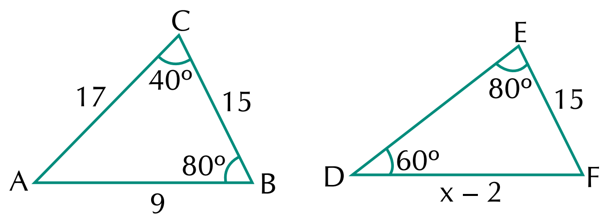
6. Si los triángulos son congruentes, calcule "$x+y-1$".



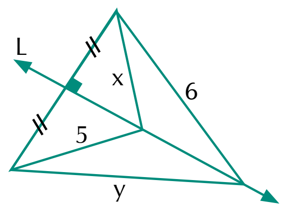
7. Si los triángulos son congruentes, calcule "x"



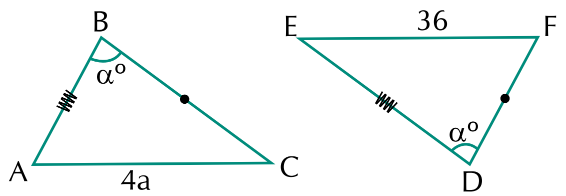
8. Si los triángulos son congruentes, calcule "x"



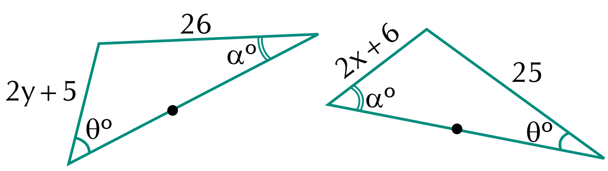
9. Si $\overrightarrow{L}$ es mediatriz, calcule "$x+y$".



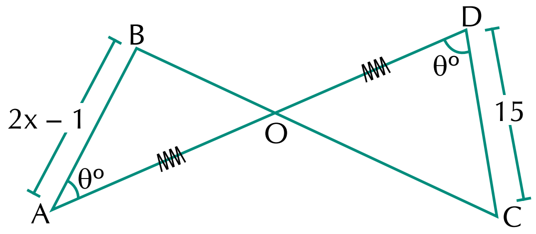
10. Si los triángulos son congruentes, calcule "a"



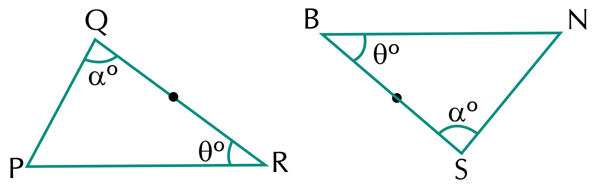
11. Calcule "$\frac{x+y}{2}$"



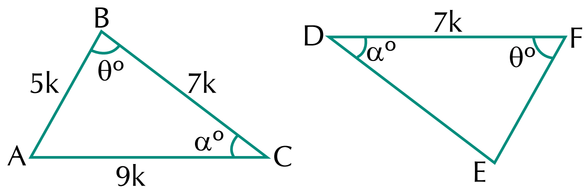
12. Del gráfico, calcule "x"



13. Si: PQ = 3x + 6 y NS = 15 u, calcule "x".

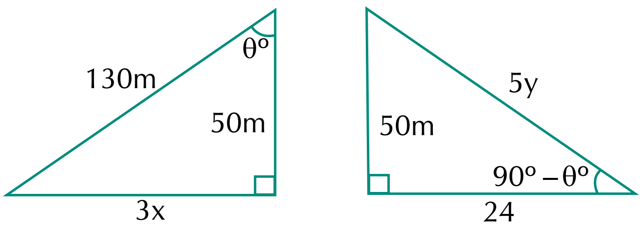


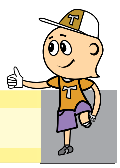
14. Si el perímetro del triángulo DEF es 84 u, calcule el lado mayor del triángulo DEF.



Aplicación cotidiana

15. Se quiere construir dos jardines iguales tal como se observa en el gráfico, ¿qué valores debe tomar "x" e "y" para que sean congruentes?





¡Tú puedes!

1. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en "B". En el lado $\overline{AC}$ se ubica el punto "P", tal que: AB = PC; luego se trazan las mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ que se cortan en "N". Si: m∢C = 26°, calcule: m∢ACN.

2. En un triángulo ABC, m∢ABC = 135°. Las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan a $\overline{AC}$ en "P" y "Q" respectivamente. Si: AP = 3m y QC = 4m, calcule "PQ".

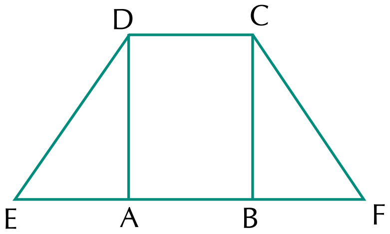
3. En un triángulo rectángulo, la bisectriz interior del ángulo agudo mayor y la mediatriz de la hipotenusa se intersectan en un punto sobre el cateto mayor. Calcule la medida del menor de los ángulos agudos.

4. En un triángulo rectángulo ABC, recto en "B", se traza la bisectriz interior $\overline{AR}$ ("R" ∈ $\overline{BC}$). Calcule la m∢ACB, si: BR = 3 y RC = 5.

5. En un triángulo rectángulo ABC, recto en "B", AB = 4 y AC = 10. Si la bisectriz interior del ángulo "A" y la mediatriz de $\overline{AC}$, se intersectan en el punto "P", calcule la distancia de "P" a $\overline{BC}$.

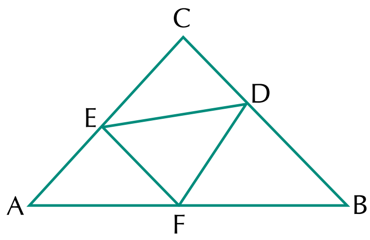
Practica en casa

1. En la figura, ABCD es un rectángulo y $\measuredangle DEA \cong \measuredangle CFB$. ¿Qué criterio permite demostrar que el $\Delta DEA \cong \Delta CFB$?.

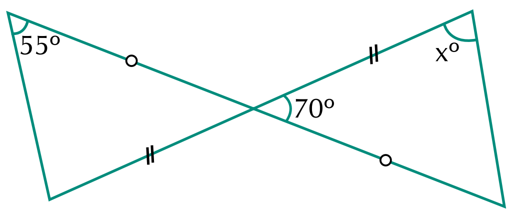


2. Se tiene un triángulo isósceles ABC ($AB = BC = 10$ u). Calcule la $m\measuredangle ABC$, si la base $AC = 10\sqrt{3}$.

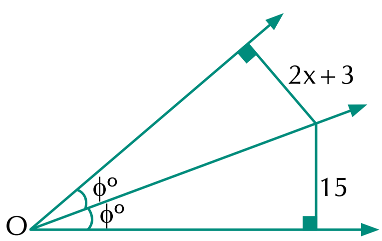
3. En la figura el triángulo ABC es equilátero y $\overline{AF} \cong \overline{BD} \cong \overline{CE}$. El criterio que permite demostrar que los triángulos AFE, ECD y BDF son congruentes es:



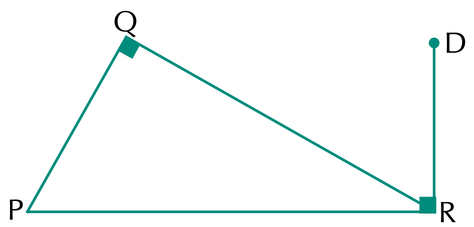
4. Calcule "x".



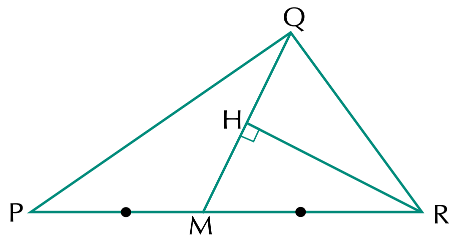
5. Calcule "$x^2 + 6$".



6. Del gráfico, calcule "QD", si: $PR = RD$, $PQ = 7$ y $QR = 15$.

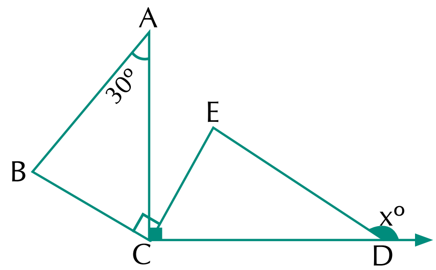


7. Calcule "PH", si: $PM = MR$; $HM = 6$ y $RH = 5$.

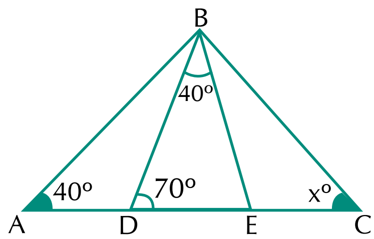


8. Sea ABC un triángulo rectángulo ($B = 90°$), donde la altura $\overline{BH}$ y la bisectriz interior $\overline{AP}$ se intersectan en "O". Si la distancia de "P" a $\overline{OB}$ es de 7 m y $AB = 12$ m, calcule "AH".

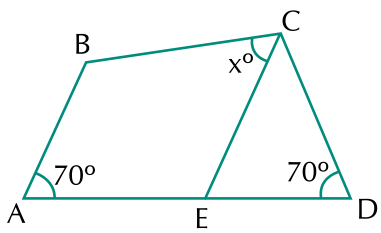
9. Si: $BC = CE$ y $AC = CD$, calcule "x".



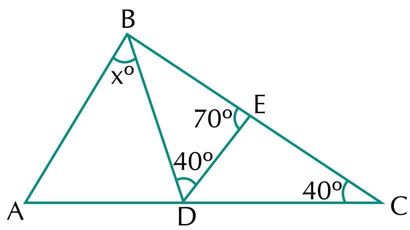
10. En el gráfico, calcule "x", si: $AD = EC$.



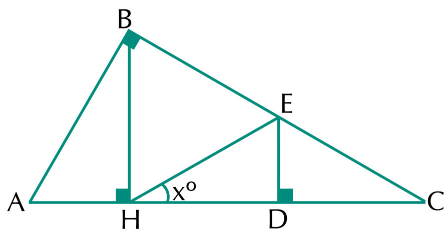
11. Calcule "x", si: $AB = ED$ y $AE = CD$.



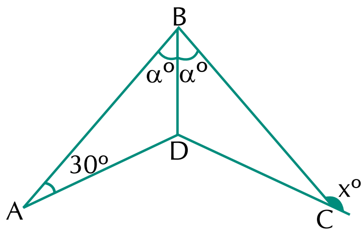
12. Calcule "x", si: $AB = DC$ y $AD = EC$



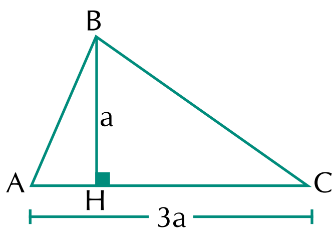
13. Calcule "x"; si: AB = EC y AH = HD.



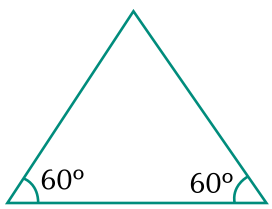
14. En el gráfico: AB = BC, calcule "x".



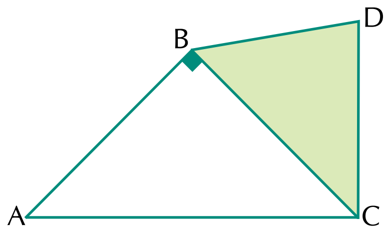
15. Si el área de la región triangular ABC es 24 u^2, calcule "a".



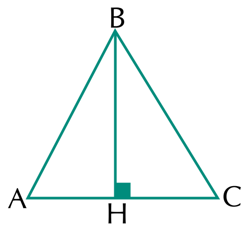
16. El perímetro del triángulo mostrado mide 12 u. Calcule el área de la región triangular.



17. En la figura, calcule el área de la región del triángulo equilátero BDC, si: AB = 3 u y AC = 5 u.



18. En la figura, el área de la región del triángulo ABC es 24 u^2. Si: BH = 3(AC), calcule "BH".



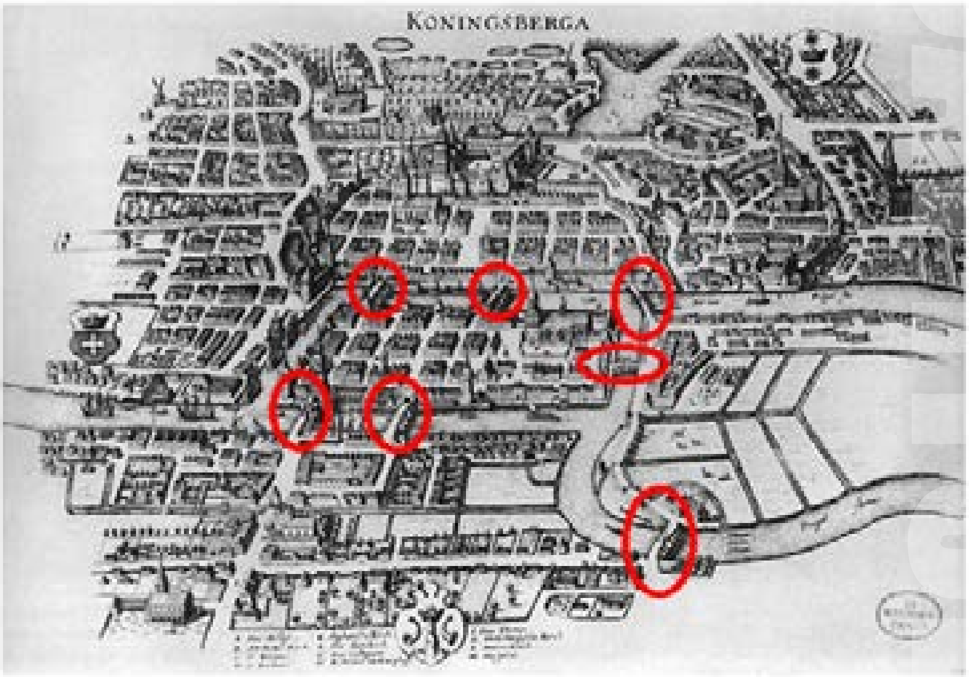
19. Los catetos de un triángulo rectángulo son entre sí como 3 es a 4. Si el área de su región es 54 u^2, ¿cuánto mide su hipotenusa?.

20. Los catetos de un triángulo rectángulo están en relación de 1 es a 2. Calcule la longitud del cateto mayor, si el área del triángulo es 16u^2.

Repaso

En este capítulo aprenderemos:

- A recordar las propiedades de las líneas notables.
- A aplicar la teoría vista anteriormente, como en el caso de triángulos rectángulos y congruencia de triángulos

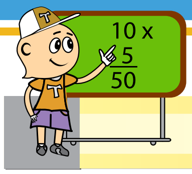


Mapa de la ciudad de Königsberg, en tiempos de Euler, que muestra resaltado el lugar donde se encontraban ubicados los siete puentes.

En 1736, Euler resolvió el problema conocido como problema de los puentes de Königsberg. La ciudad de Königsberg, en Prusia oriental (actualmente Kaliningrado, en Rusia), estaba localizada en el río Preguel, e incluía dos grandes islas que estaban conectadas entre ellas y con las dos riberas del río mediante siete puentes. El problema consistía en decidir si era posible seguir un camino que cruzase todos los puentes una sola vez y que finalizase llegando al punto de partida. No lo hay y Euler logró probarlo matemáticamente demostrando que no existía un ciclo euleriano debido a que el número de puentes en más de dos bloques era impar.

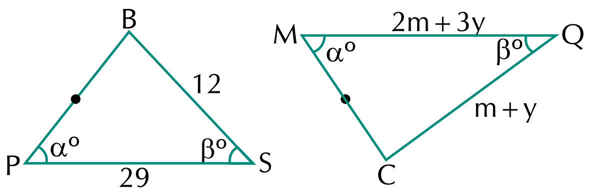
A esta solución se la considera el primer teorema de teoría de grafos y de grafos planares. Euler también introdujo el concepto conocido como característica de Euler del espacio, y una fórmula que relacionaba el número de lados, vértices y caras de un polígono convexo con esta constante. El teorema de poliedros de Euler, que básicamente consiste en buscar una relación entre el número de caras, aristas y vértices en los poliedros. Utilizó esta idea para demostrar que no existían más poliedros regulares que los sólidos platónicos conocidos hasta entonces. El estudio y la generalización de esta fórmula, especialmente por Cauchy y L'Huillier, supuso el origen de la topología.

Dentro del campo de la geometría analítica descubrió además que tres de los puntos notables de un triángulo (baricentro, ortocentro y circuncentro), podían obedecer a una misma ecuación, es decir, a una misma recta. A la recta que contiene el baricentro, ortocentro y circuncentro se le denomina "Recta de Euler" en su honor.

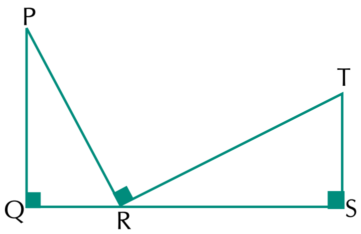


Aplica lo comprendido

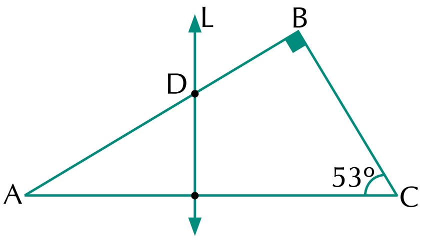
1. Si el triángulo PBS es congruente con el triángulo MCQ, calcule: $m - y$



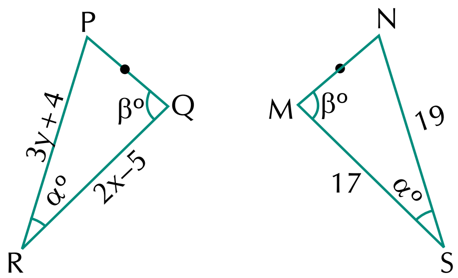
2. Calcule "x", si: $TS = x^2 + 2$, $QR = 27$ y $PR = RT$



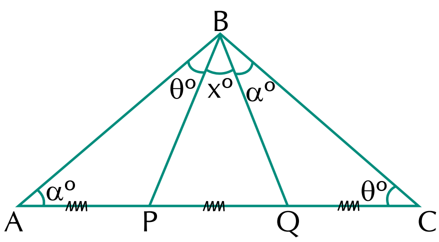
3. $\overrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$. Si: $BC = 24$, calcule "DB"



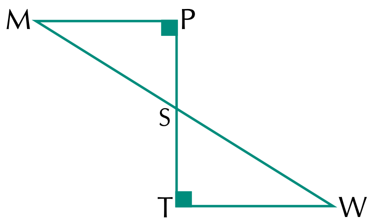
4. Si el $\Delta PQR \cong \Delta NMS$, calcule "$x + y$".



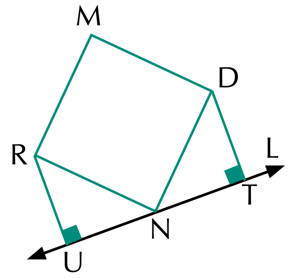
5. Del gráfico, calcule "x".



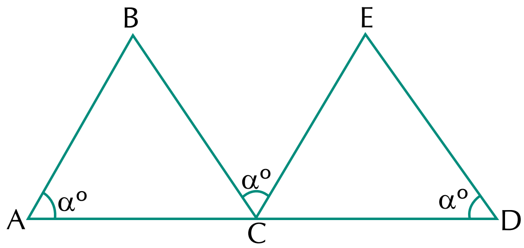
6. Calcule "$x-y$", si: $MS = SW$; $MP = 3x + 5$; $TW = 20$; $PS = 2y - 3$ y $ST = 5$.



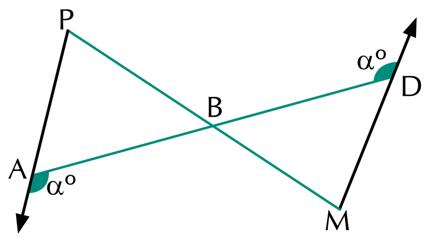
7. Calcule el lado del cuadrado RMDN, si: $RU = 12$ y $UT = 17$



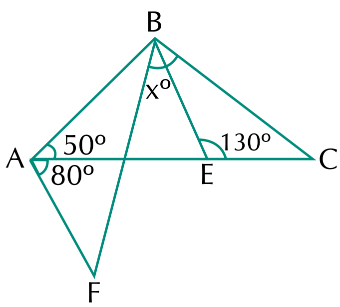
8. Si: $BC = CE$, $AB = 7$ y $ED = 9$, calcule "AD".



9. Calcule "$PB + x$", si: $AB = BD$; $AP = 2x + 6$; $MD = 22$ y $PM = 18$



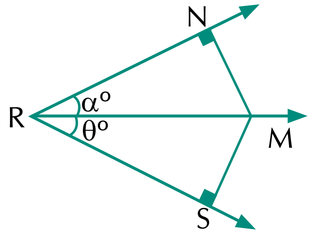
10. Si: $BF = BC$ y $AF = EC$, calcule "x".



Aprende más...

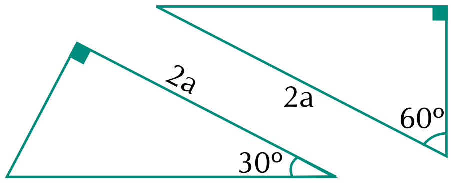
Comunicación matemática

1. Indicar el tipo de congruencia, si: $\alpha° = \theta°$.



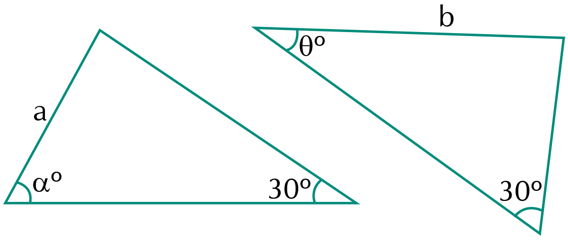
....

2. Indicar que caso de congruencia ocurre, si lo hay, en:



....

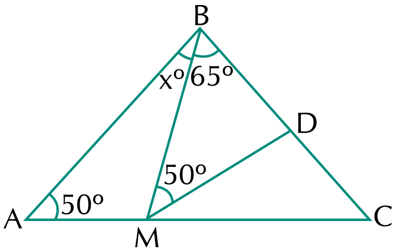
3. Indicar el caso de congruencia, si: $\alpha° = \theta°$ y $a = b$



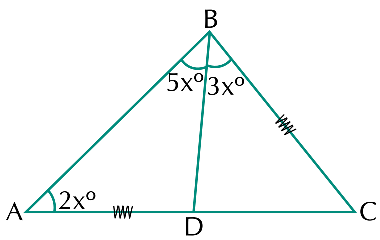
....

Resolución de problemas

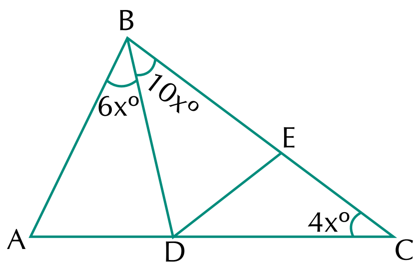
4. Calcule "x", si: $AB = MC$.



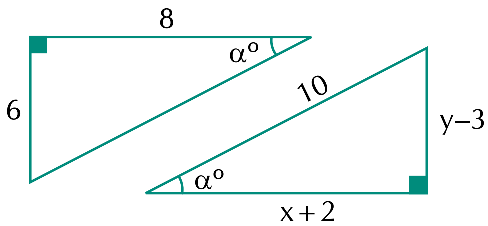
5. Calcule "x"



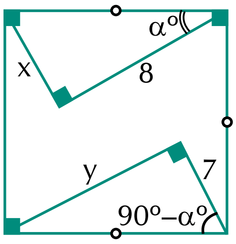
6. Calcule "x", si: $AB = DC$ y $BD = DE$.



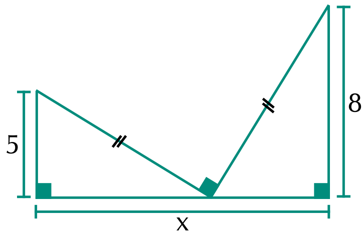
7. Calcule "$x + y$"



8. Calcule "x.y"



9. Del gráfico, calcule "x"



10. Si las bases de un trapecio miden 10 y 15u y su altura es de 18 u, calcule el área de su región.

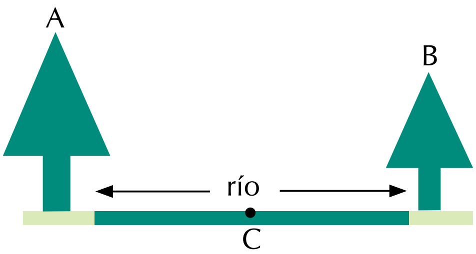
11. Los lados de un triángulo miden 14; 15 y 13 u. Calcule el área de su región.

12. La diagonal de un cuadrado mide $23\sqrt{2}$. Calcule el área de su región.

13. Calcule el área de la región triangular donde sus lados son proporcionales a 5; 12 y 13, siendo su perímetro igual a 120 u.

Aplicación cotidiana

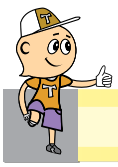
En cada orilla de un río se encuentran dos árboles de diferente tamaño, como se muestra en el gráfico:



Un pájaro se encuentra en el punto "A" y observa su alimento en el punto "C". "A" dista del piso 6m y "C" dista de la base del primer árbol 3m.

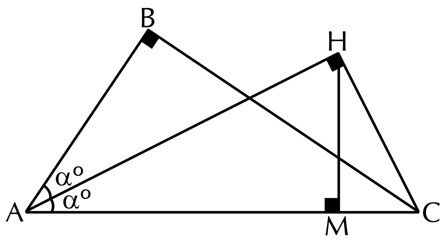
14. La distancia del alimento del pájaro al punto "A" y "B" es la misma. Si el pájaro parte de "A" coge su alimento y se dirige a "B" formando un ángulo de 90º, ¿qué ancho tiene el río?

15. Si el pájaro hace el recorrido anterior, pero de "B" se dirige a un punto en tierra que se encuentra a 10 m del segundo árbol (dicho punto con los árboles son colineales). ¿Qué longitud voló el pájaro del punto "B" hacia el último lugar de la tierra?

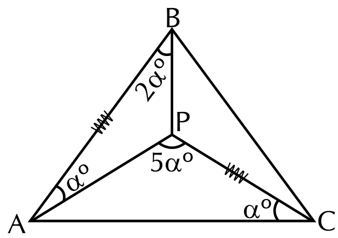


¡Tú puedes!

1. Del gráfico, calcule "BC", si: HM = 6 u.



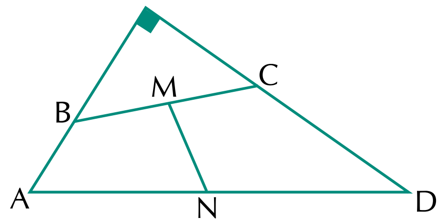
2. Del gráfico: AC = 16 m, calcular "AP"



3. En un triángulo escaleno ABC, sobre la prolongación del lado $\overline{AB}$ se toma: BD = BC y en la prolongación de $\overline{CB}$ se toma: BE = BA. Luego se traza $\overline{DE}$ prolongándola hasta que corte a la prolongación de $\overline{CA}$ en el punto "F". Indicar que línea notable es $\overline{FB}$ del triángulo AFD.

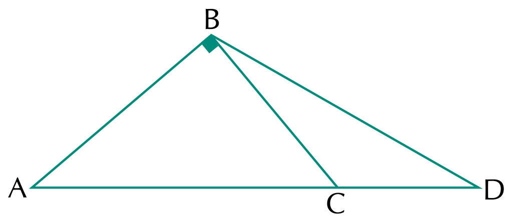
4. En un triángulo rectángulo ABC, recto en "B", se traza la bisectriz interior $\overline{AM}$ y por "C" se traza $\overline{CN}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AM}$. Hallar la distancia de "N" a $\overline{AC}$, si: BC = 16m.

5. Si: BM = MC, AN = ND, AB = 10m y CD = 24m, calcule "MN".

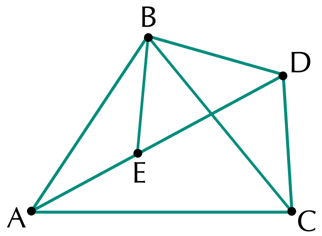


Practica en casa

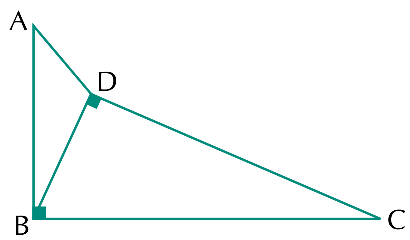
1. Si: AC = CD, calcule "BD", siendo: AB = 3 y BC = 2.



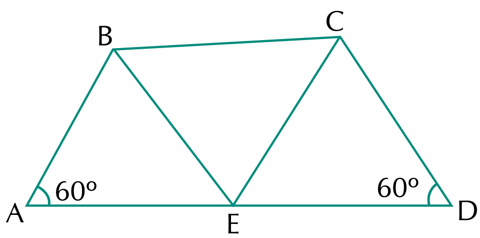
2. ΔABC y ΔEBD: equiláteros. Si: AE = 10, calcule "CD".



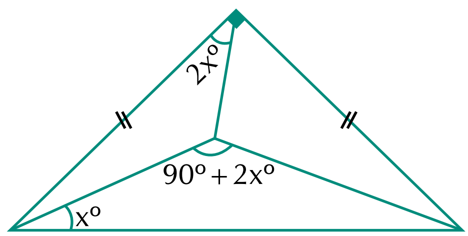
3. Calcule "AD", si: AB = BC, BD = 3 y DC = 7



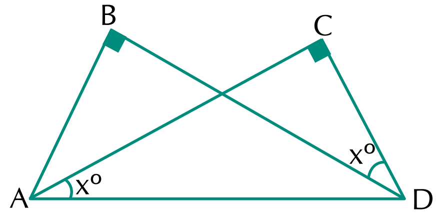
4. Si: AB = ED, AE = CD y CE = 4, calcular "BC".



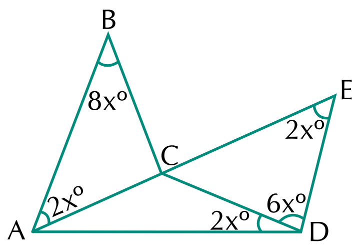
5. Calcule "x"



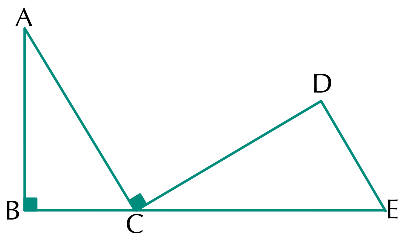
6. Si: AB = CD, calcule "x".



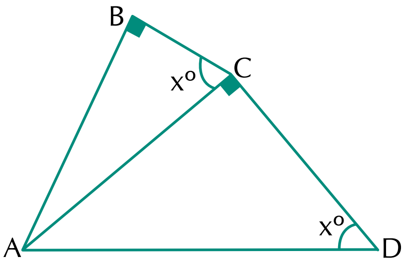
7. Calcule "AD", si: AC = 10 y AB = CD



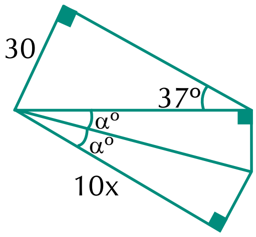
8. Calcule "DE", si: AC = CD, AB = 6, BC = 3 y CE = 10.



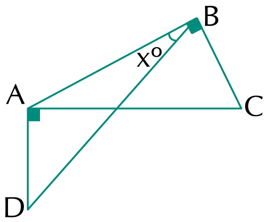
9. En el gráfico, calcule "x°", si: BC = 4 u y CD = 8 u.



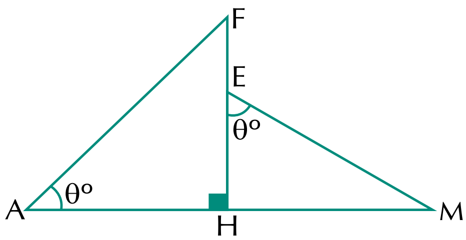
10. Calcule "x".



11. Si: AD = AC, AB = 3 y BC = 1, calcule "x°".



12. Calcule "AM", si: HF = 8, AF = EM y FE = EH



13. En el ΔABC, m∢A = 57°. La bisectriz del ángulo "B" y la mediatriz del lado $\overline{BC}$, se cortan ambas en un mismo punto $\overline{AC}$, calcule la medida del ángulo "C".

14. Calcule el área de la región triangular de un triángulo rectángulo, si un cateto mide 8 u y la hipotenusa 17 u.

15. Calcule el área de la región triangular de un triángulo equilátero de 5 u de lado.

16. Calcule el área de la región triangular, cuya base es el triple de su altura, siendo la base de 24 u.

17. En un triángulo rectángulo, un cateto mide "8 + x" y el otro cateto mide "$x^2 + 1$". Si: x = 3, calcule el área de la región triangular.

18. En un triángulo, el área de su región es de 162 m^2. Si su base es el cuádruple de su altura, calcule su base.

19. La altura de un triángulo mide 3 unidades más que su base. Si el área de su región es de 20 u^2, calcule la base.

20. En el triángulo ABC, la base $\overline{AC}$ mide "2x + 5" y la altura $\overline{BH}$ mide "x + 7". Si el área de su región es de 55u^2, calcule "x".

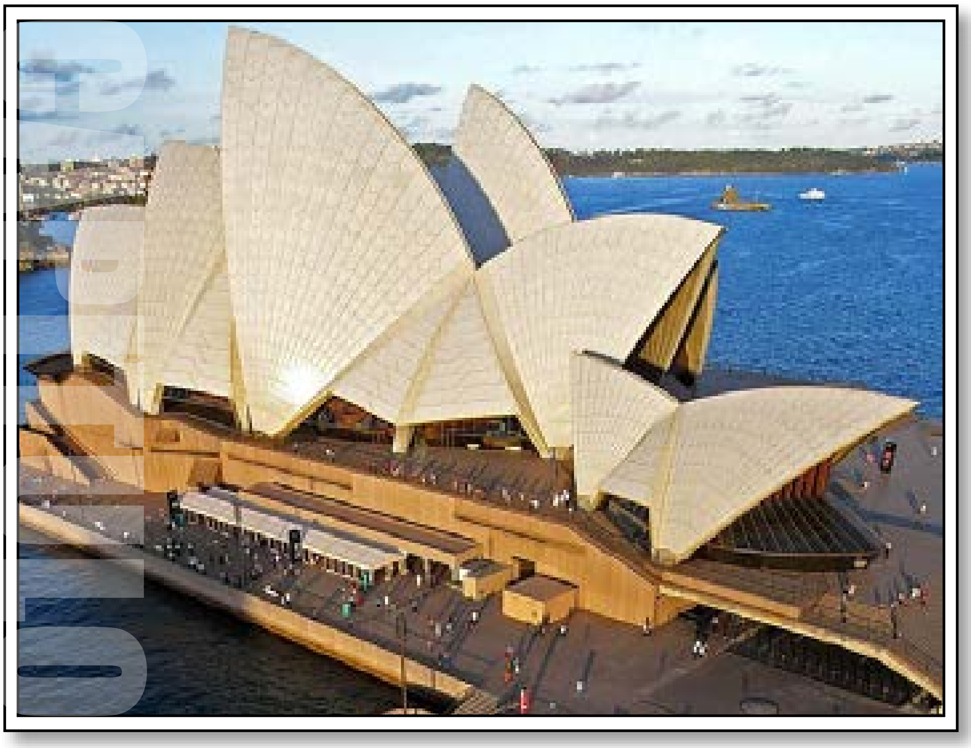
Aplicaciones de la congruencia de triángulos I

En este capítulo aprenderemos:

- A reconocer las aplicaciones referentes a la congruencia.
- A aplicar las propiedades referentes a la congruencia y establecer la diferencia de cada propiedad.

La Arquitectura adopta muchas formas diferentes en el mundo islámico, a menudo en relación con la religión musulmana: la mezquita es una de ellas, pero la madraza y los lugares de retiro son también edificios típicos de los países del islam adaptados a la práctica del culto.

Los tipos de edificios varían mucho según los períodos y las regiones. Antes del siglo XIII, en la cuna del mundo árabe, es decir, en Egipto, en Siria, en Iraq y en Turquía, casi todas las mezquitas siguen el llamado plano árabe, con un gran patio y una sala de oración hipóstila, pero que varían enormemente en su decoración e incluso en sus formas: en el Magreb, las mezquitas adoptaron un plano en "T" con naves perpendiculares a la qibla, mientras que en Egipto y Siria las naves son paralelas. Irán tiene sus propias especificaciones como el uso del ladrillo y la decoración en estuco y cerámica, el uso de formas particulares a menudo tomadas del arte Sasánida como los Iwan (porches de entrada abiertos por un gran arco) y el arco persa. En España, hay más bien un gusto por una arquitectura coloreada con el uso de arcos variados (de herradura, polilobulados, etc).En Anatolia, bajo la influencia de la arquitectura bizantina, pero también debido a evoluciones específicas en el plano árabe en esta región, se construyeron las grandes mezquitas otomanas de cúpula singular y desproporcionada. En la India los planos se fueron alejando gradualmente del modelo iraní, destacando mucho en sus edificios la cúpula bulbosa.

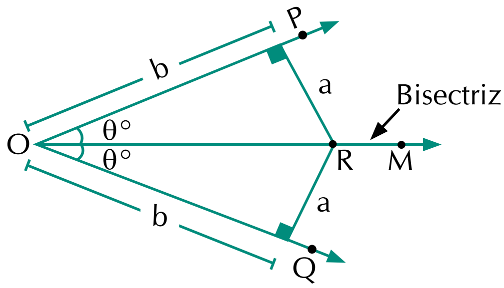


- ¿Puedes apreciar figuras congruentes en esta estructura?

Conceptos básicos

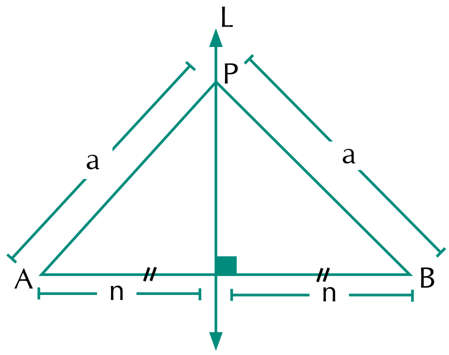
Aplicaciones de la congruencia

Teorema de la bisectriz
Todo punto que pertenece a la bisectriz de un ángulo equidista a los lados del ángulo.



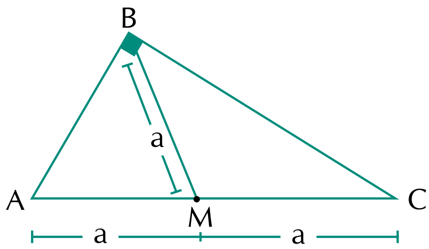
- $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo POQ
- "R" $\in \overrightarrow{OM}$

Teorema de la mediatriz
Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del segmento



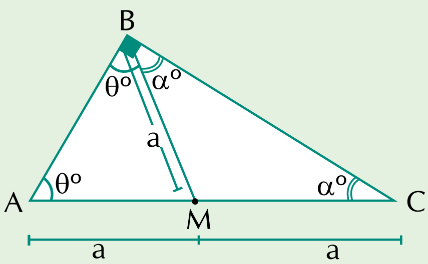
- $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz del segmento $\overline{AB}$
- "P" $\in \overleftrightarrow{L}$

Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa
En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.



- $\overline{BM}$ es mediana relativa a la hipotenusa $\overline{AC}$.
- $BM = \dfrac{AC}{2}$

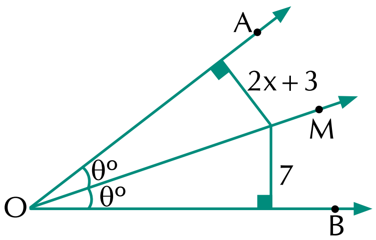
Ten en cuenta



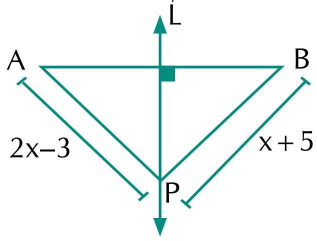
- El ΔABM es isósceles.
- El ΔMBC es isósceles.

Aplica lo comprendido

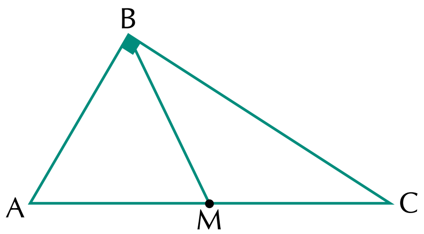
1. Calcule el valor de "x", si $\overrightarrow{OM}$ es bisectriz del ángulo AOB.



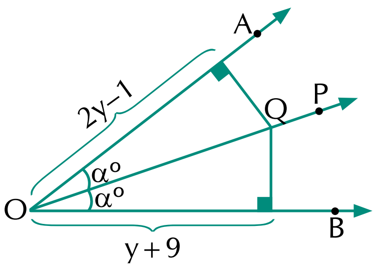
2. Calcule el valor de "x", si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.



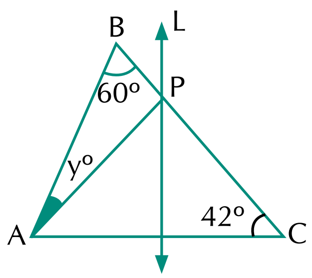
3. En el triángulo rectángulo ABC: AC = 20. Calcule "x", si $\overline{BM}$ es mediana relativa a $\overline{AC}$ y mide "2x– 4".



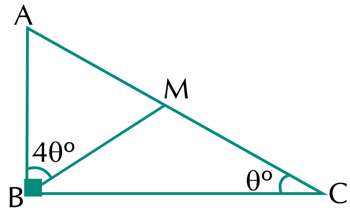
4. Calcule "y", si $\overline{OP}$ es bisectriz del ángulo AOB.



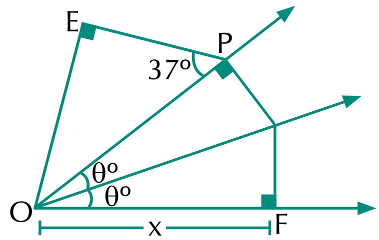
5. Calcule "y", si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.



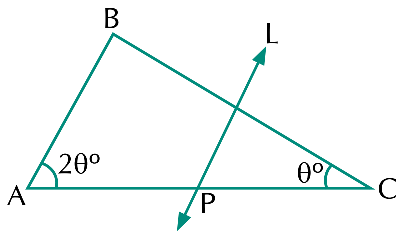
6. Del gráfico, calcule "θ°", si $\overline{BM}$ es mediana relativa a $\overline{AC}$.



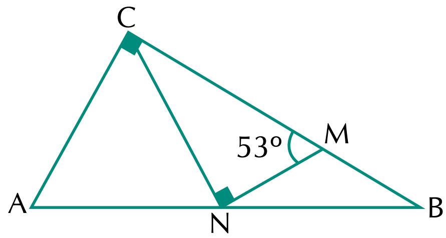
7. Calcule "x", si: OE = 9 cm.



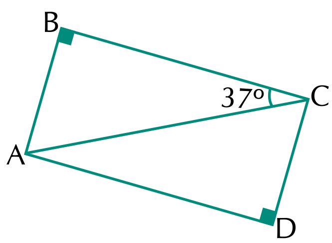
8. Si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{BC}$, calcule "AB", si: PC = 9 cm.



9. En el gráfico, calcule "AB", si: MC = 15 m y AN = NB

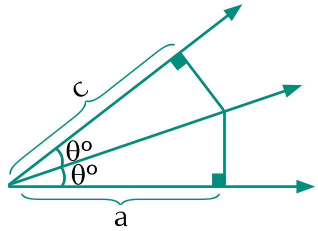


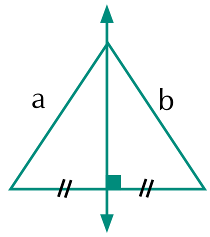
10. Si: AB = 15 cm y CD = 7cm, calcule el valor de "DA".



Comunicación matemática

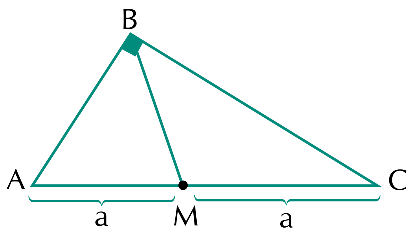
1. En cada gráfico, completar:





c = ... a = ...

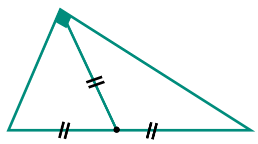
2. En el gráfico, completar:



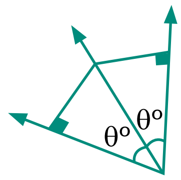
$\frac{BM}{AC}$ = ...

3. Relacionar con flechas.

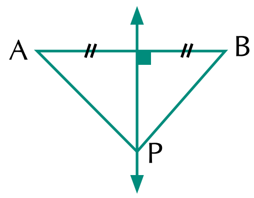
Teorema de la bisectriz



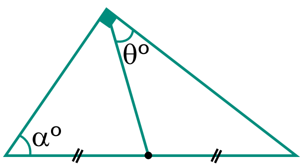
Teorema de la mediatriz

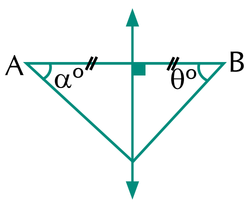


Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa



4. En cada caso, completar :

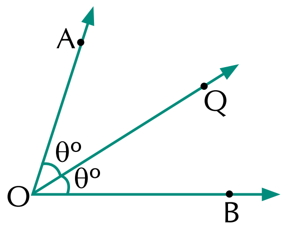




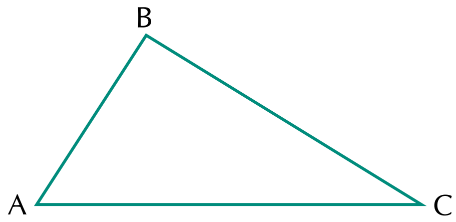
α° + ... = ... α° = ...

5. Graficar en cada caso, usando una regla.

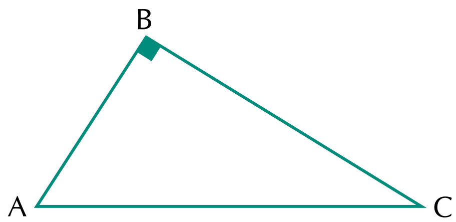
- En el gráfico, ubicar "P" que pertenece a $\overline{OQ}$ y trace $\overline{PM}$ y $\overline{PN}$ perpendicular a $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ respectivamente.



- Trace la mediatriz de $\overline{BC}$ que corte a $\overline{AC}$ en "P".

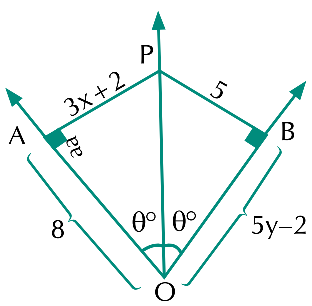


- Trace la mediana $\overline{BM}$ relativa a la hipotenusa $\overline{AC}$.

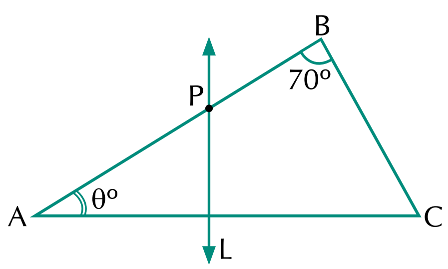


Resolución de problemas

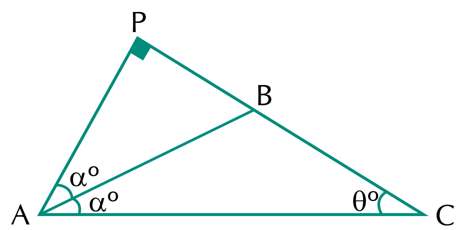
6. Calcule "x+y".



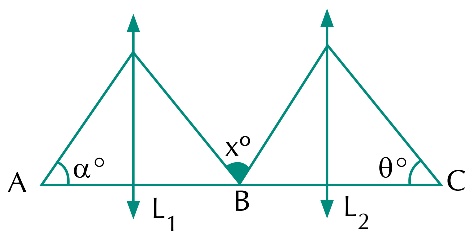
7. Calcule "θ", si: AP=BC y $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$



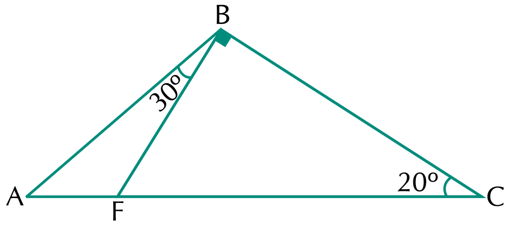
8. En el gráfico, calcule "θ", si: PC=9 cm y PB=4 cm.



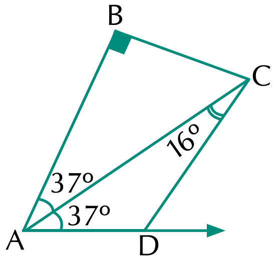
9. En el gráfico: $\alpha^{o}+\theta^{o}=110^{o}$. Calcule "xº", si $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.



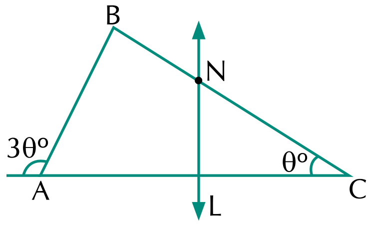
10. En la figura, calcule "FC", si: AB = 3 cm



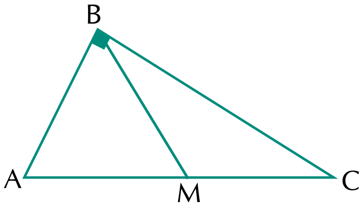
11. En el gráfico, calcule "BC", si: CD = 5 cm.



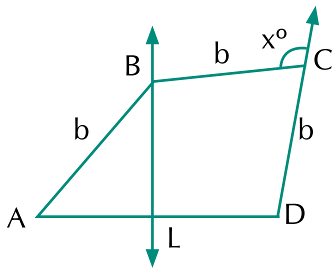
12. En el gráfico, calcule "AB", si: NC = 17 cm y $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.



13. En el gráfico, $\overline{BM}$ es mediana relativa a $\overline{AC}$. Calcule "BM", si: AB = 6 cm y BC = 8 cm.



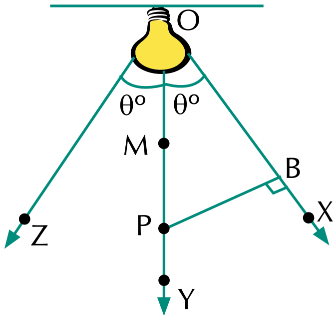
14. En el gráfico, calcule "x", si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AD}$.

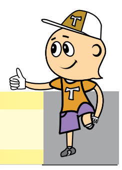


Aplicación cotidiana

15. En el gráfico, el foco emite los haces de luz $\overrightarrow{OX}$; $\overrightarrow{OY}$ y $\overrightarrow{OZ}$.

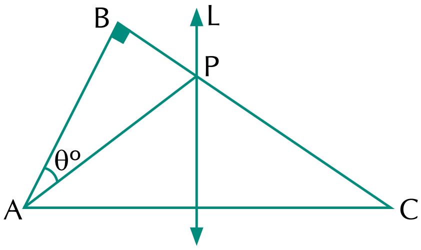
- Si: PB = 16 cm, calcular la distancia de "P" al haz $\overrightarrow{OZ}$.
- Si: OM = MP, calcular la distancia de "M" al haz $\overrightarrow{OX}$.



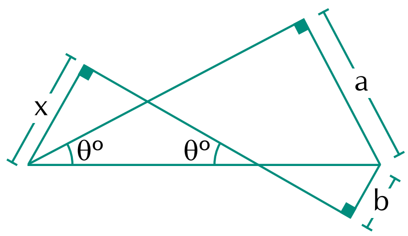


¡Tú puedes!

1. En el gráfico, $\overline{AP}$ es bisectriz del ángulo BAC y $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$. Calcule "θ°".

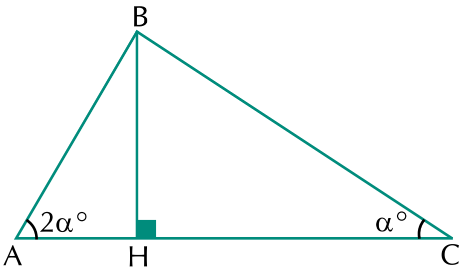


2. Del gráfico mostrado, calcule "x".

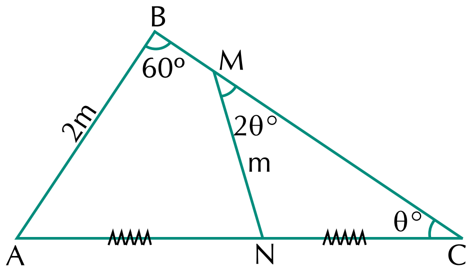


3. Calcule el máximo y mínimo valor entero que puede tener la mediana relativa al tercer lado de un triángulo, si los otros dos lados miden 4 m y 10 m.

4. Del gráfico: AH = 2 y HC = 8. Calcule "AB"

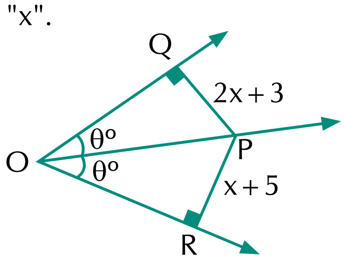


5. Calcule "θ"

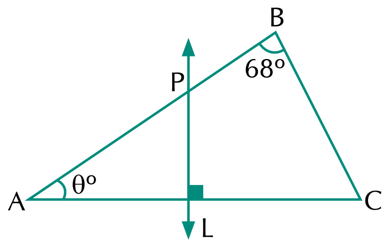


Practica en casa

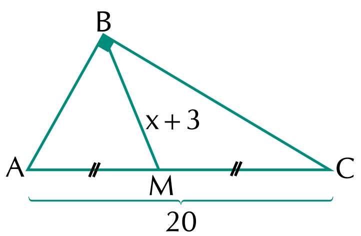
1. Calcule "x".



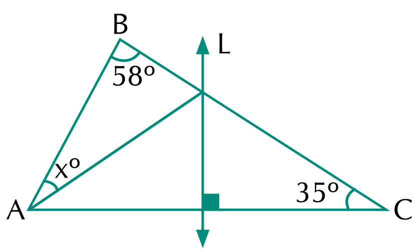
2. Calcule "θ°" si: AP = BC y $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.



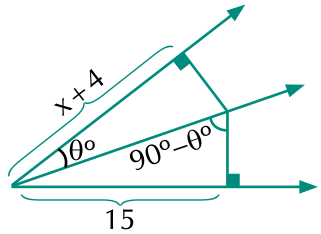
3. Calcule "x".



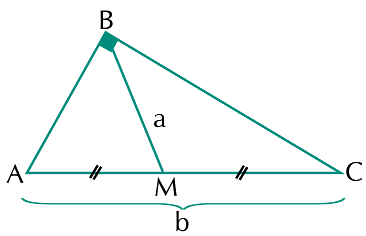
4. Calcule "x", si la recta $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.



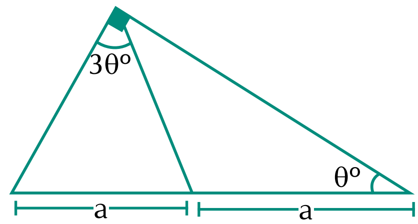
5. Calcule "x + 1".



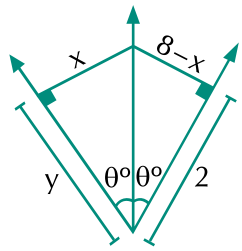
6. Calcule: $\frac{a}{b}$



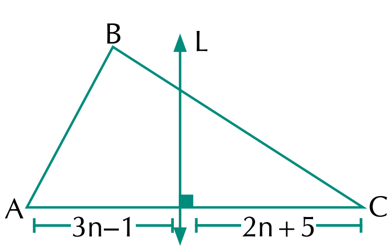
7. Calcule "θ".



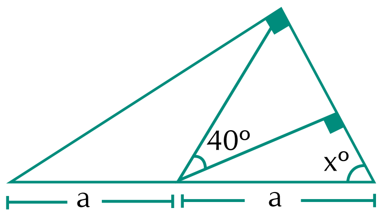
8. Calcule "x + y".



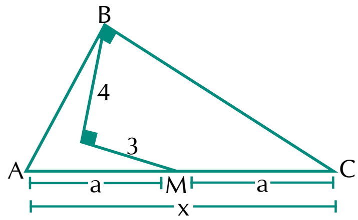
9. Calcule "n", si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.



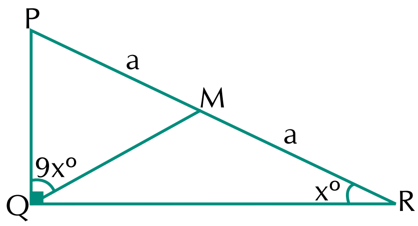
10. Calcule "x".



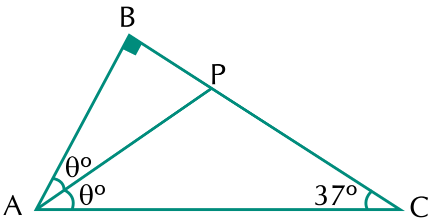
11. Calcule "x".



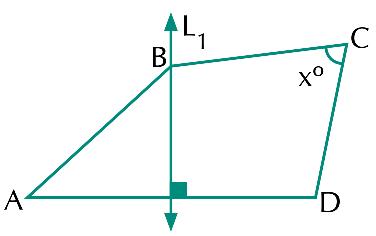
12. Calcule "x".



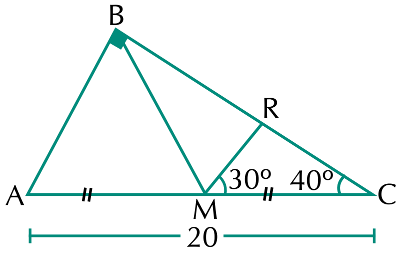
13. Calcule "BP", si: PC = 10 cm.



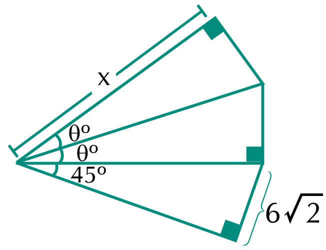
14. Del gráfico, calcule "x", si $\overleftrightarrow{L_1}$ es mediatriz de $\overline{AD}$ y AB = BC = CD.



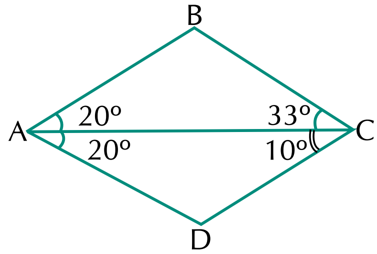
15. Del gráfico, calcule "BR".



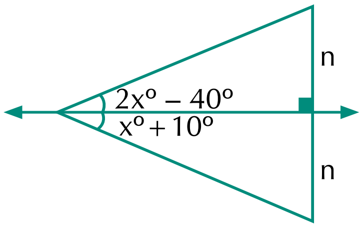
16. Calcule "x".



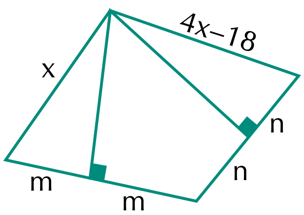
17. Calcule "BC", si: CD = 40 cm.



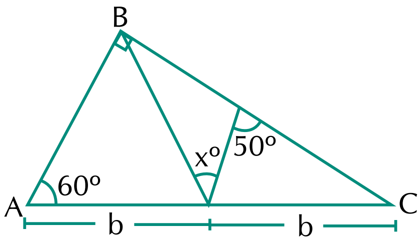
18. Calcule "x".



19. En el gráfico, calcule "x".



20. En el gráfico, calcule "xº".



Aplicaciones de la congruencia de triángulos II

En este capítulo aprenderemos:

- A reconocer y graficar la base media de un triángulo.
- Aplicar las propiedades referentes a la base media.
- A reconocer las diferentes líneas originadas, relativas a la base en un triángulo isósceles.

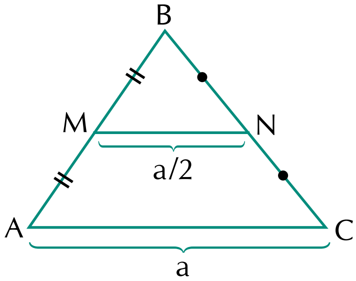
La eficiencia estructural de un puente puede ser considerada como el radio de carga soportada por el peso del puente, dado un determinado conjunto de materiales. En un desafío común, algunos estudiantes son divididos en grupos y reciben cierta cantidad de palos de madera, una distancia para construir y pegamento, y después les piden que construyan un puente que será puesto a prueba hasta destruirlo, agregando progresivamente carga en su centro. El puente que resista la mayor carga es el más eficiente. Una medición más formal de este ejercicio es pesar el puente completado en lugar de medir una cantidad arreglada de materiales proporcionados y determinar el múltiplo de este peso que el puente puede soportar, una prueba que enfatiza la economía de los materiales y la eficiencia de las ensambladuras con pegamento.

- ¿Qué puedes apreciar en esta estructura?, ¿Presenta triángulos isósceles?

Conceptos básicos

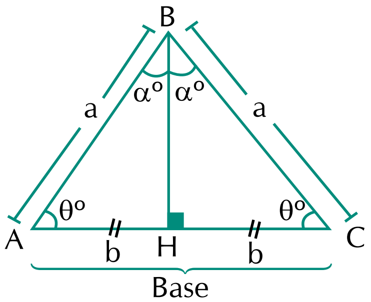
Aplicaciones de la congruencia

Teorema de la base media
La base media es el segmento paralelo a la base y su longitud es la mitad de la longitud de dicha base.



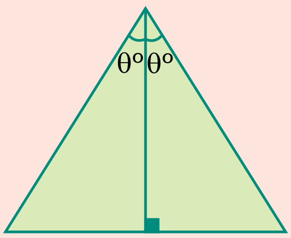
- En el gráfico: AM = MB y BN = NC
- $\overline{MN}$: Base media
- $\overline{MN} \parallel \overline{AC} \rightarrow \boxed{MN = \dfrac{AC}{2}}$

Propiedad del triángulo isósceles
La altura relativa a la base de un triángulo isósceles es altura, bisectriz, mediana y segmento de recta mediatriz.

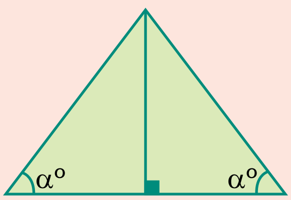


$\overline{BH}$ $\begin{cases}\text{Altura}\\ \text{Bisectriz}\\ \text{Mediana}\\ \text{Segmento de recta mediatriz}\end{cases}$

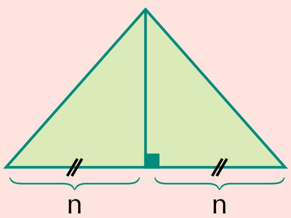
Recuerda que...



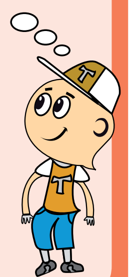
- En la figura, el triángulo es **isósceles**.

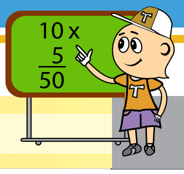


- En la figura, el triángulo es **isósceles**.



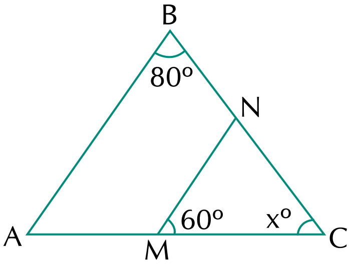
- En la figura, el triángulo es **isósceles**.



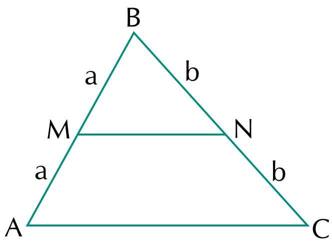


Aplica lo comprendido

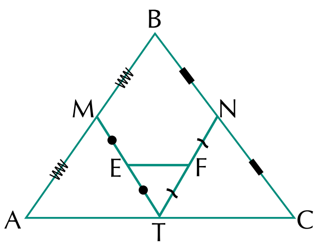
1. Calcule "x", si: BN = NC y AM = MC.



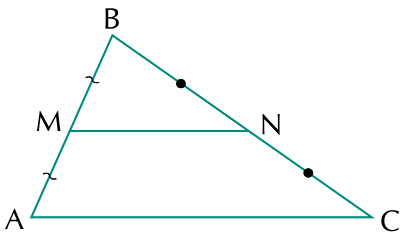
2. Calcule "x", si: MN = x + 2 y AC = 10.



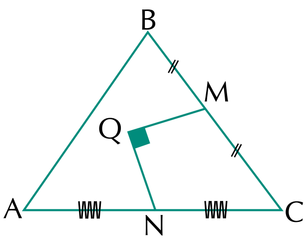
3. Calcule "EF", si: AC = 18 cm.



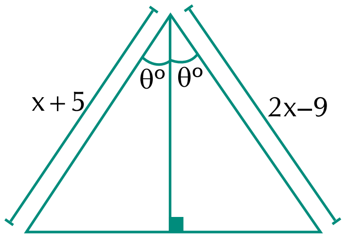
4. En el gráfico: AC + MN = 18 cm, calcule "AC".



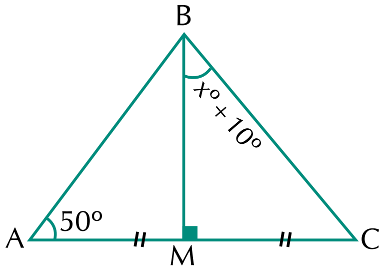
5. En el gráfico, calcule "AB", si: QM = 3 cm y QN = 4 cm.



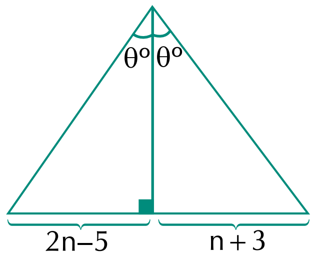
6. Del gráfico, calcule "x".



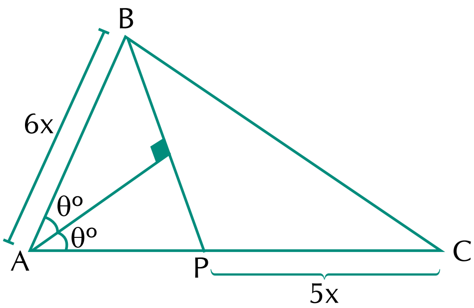
7. En el gráfico, calcule "x".



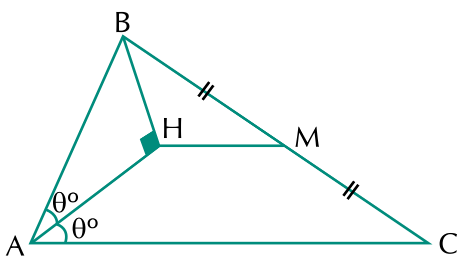
8. En el gráfico, calcule "n"



9. En el gráfico: AC = 22 cm, calcule "x".

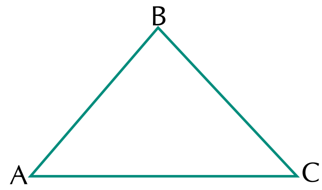


10. En el gráfico, calcule "HM", si: BM = MC; AC = 16 cm y AB = 10 cm

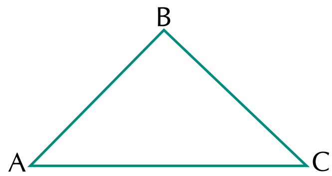


Comunicación matemática

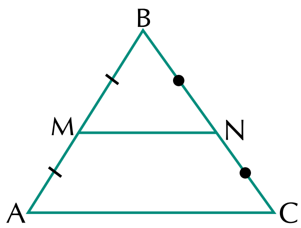
1. Graficar en cada caso, usando regla.
   - En el gráfico, ubicar "M" punto medio de $\overline{BC}$ y "N" punto medio de $\overline{AC}$, luego unir "M" y "N".



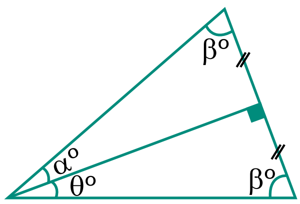
   - En el triángulo isósceles ABC mostrado (AB = BC), trazar la altura $\overline{BH}$.



2. En cada caso, completar:



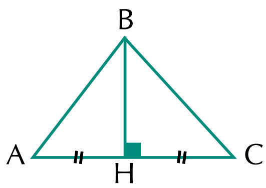
AC = 2(......)



$\alpha°$ = ...

3. Indicar si es verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

   - La base media es el segmento que mide el doble de la base correspondiente paralela........ (   )
   - En la figura:

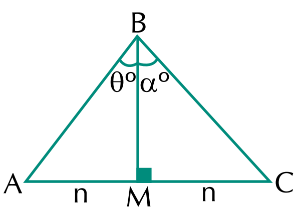


$\overline{BH}$ es bisectriz del ángulo ABC.. (   )

   - En un triángulo equilátero la altura relativa a cualquier base cumple función de mediatriz..(   )

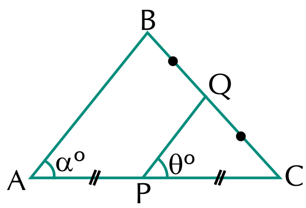
4. En cada caso, comparar indicando si es mayor (>), menor (<) o igual (=).

•



$\alpha°$ .... $\theta°$

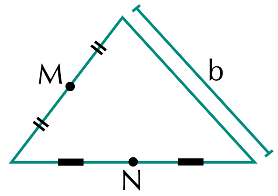
•



$\alpha°$ .... $\theta°$

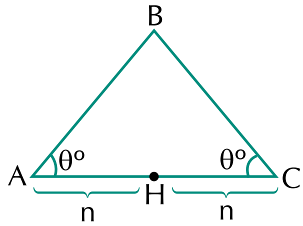
5. Completar los gráficos y enunciados según corresponda.

- Unir "M" con "N".



"MN" se denomina .... y mide ....

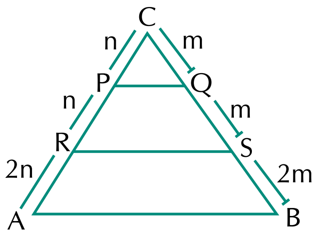
- Unir "B" con "H".



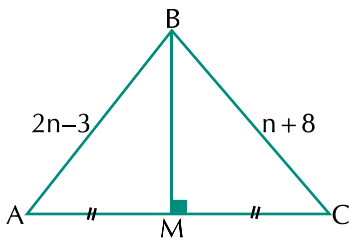
$\overline{BH}$ es: { ....

Resolución de problemas

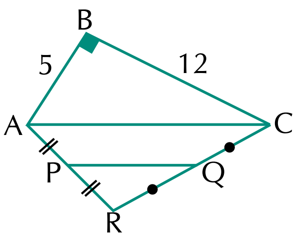
6. En el gráfico: PQ = 4 cm. Calcule "AB".



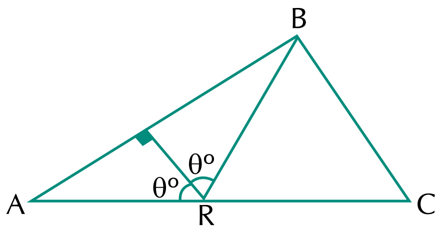
7. En el gráfico, calcule "n".



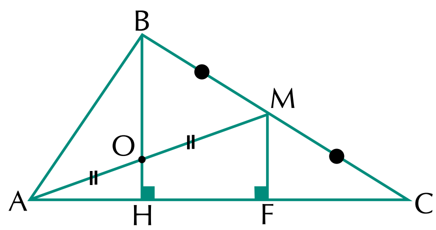
8. En el gráfico, calcule "PQ".



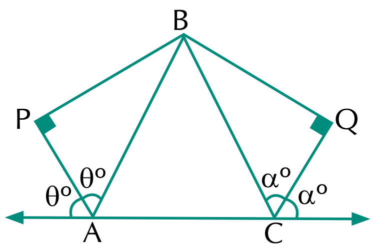
9. En el gráfico, calcule "AC", si: RB = 8 cm y RC = 7 cm.



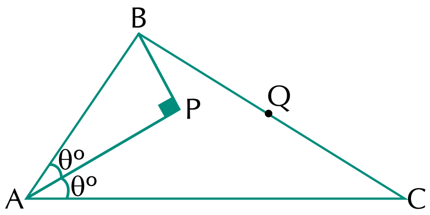
10. En el gráfico, calcule "OH", si: BH = 16 cm.



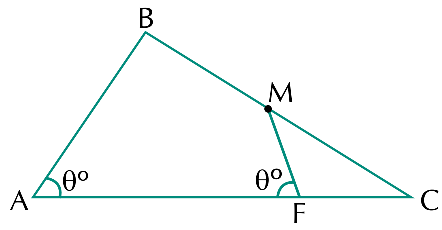
11. En el gráfico, calcule "PQ", si: AB = 16 cm, BC = 18 cm y AC = 20 cm.



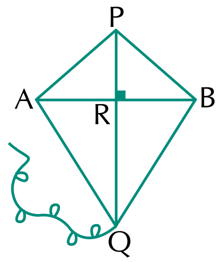
12. En el gráfico: AC–AB = 8 m. Calcule "PQ", si: BQ = QC.



13. En el gráfico: AB = 8 cm y BM = MC. Calcule "MF".



Aplicación cotidiana



La cometa

Julio es un niño que desea construir su cometa hecha de dos carrizos $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$ como se muestra en la figura. Además: AR = RB.

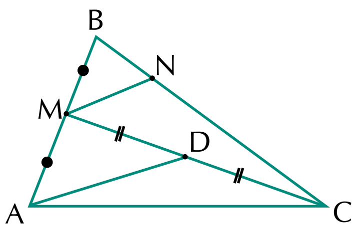
14. Si se desea colocar una cuerda alrededor, sabiendo que: AP = 8 cm y QB = 19 cm, calcule el perímetro de la cometa.

15. Si: AQ = 13 cm y RQ = 12 cm, calcule la medida de "AB".

¡Tú puedes!

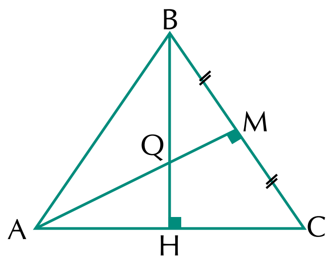
1. En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{AM}$ y la altura $\overline{BH}$ que biseca a dicha mediana en el punto "O". Calcule "BO", si: BH = 28 cm.

2. En el gráfico: $\overline{MN}$ // $\overline{AD}$, "M" y "D" son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{MC}$ respectivamente. Calcule "MN", si: AD = 18 cm.

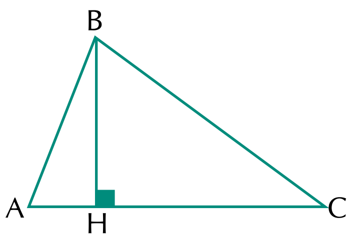


3. Los lados de un triángulo miden 10; 12 y 14 cm. Se trazan dos bisectrices exteriores y desde el tercer vértice se trazan perpendiculares a estas bisectrices. Calcule el segmento que une los pies de las perpendiculares.

4. En el gráfico, calcule "AC", si: AB = BC. Además: QH = 1 cm.

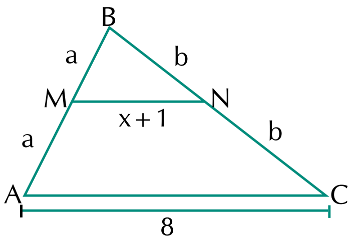


5. En el gráfico: m∢BAC = 2m∢BCA, además: AH = a y HC = b. Calcule "AB" en términos de "a" y "b".

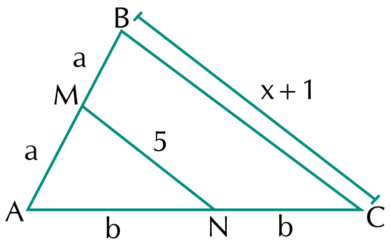


Practica en casa

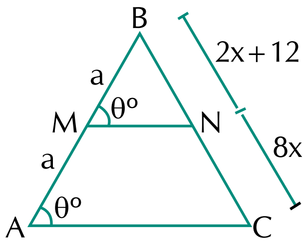
1. Calcule "x".



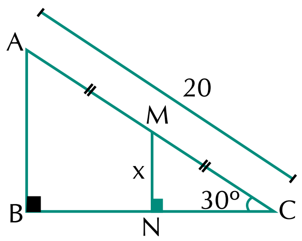
2. Calcule "x".



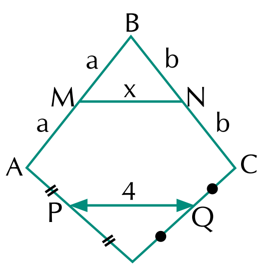
3. Calcule "x".



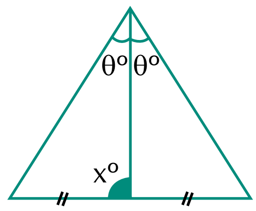
4. Calcule "x".



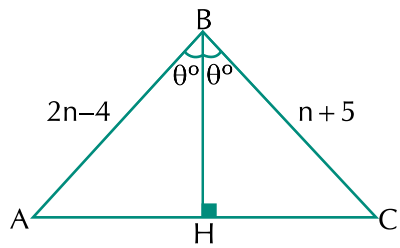
5. Calcule "x".



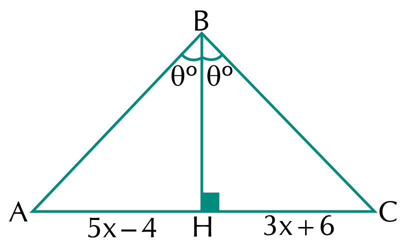
6. Calcule "xº".



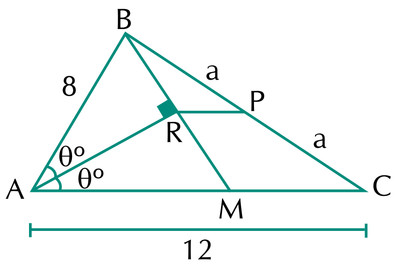
7. Calcule "n".



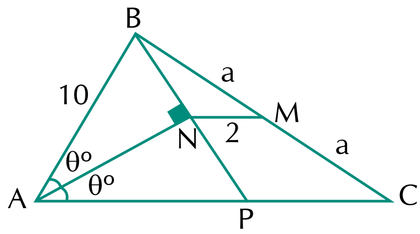
8. Calcule "x".



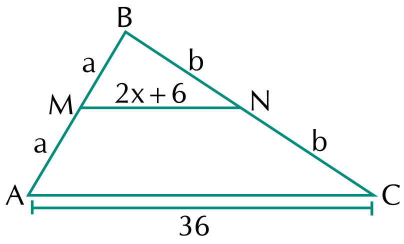
9. Calcule "RP".



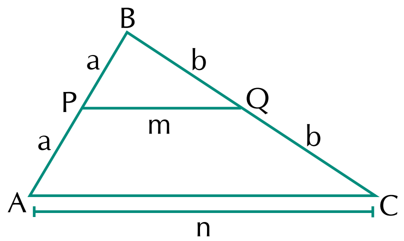
10. Calcule "AC".



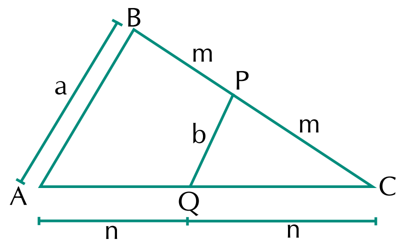
11. Calcule "x".



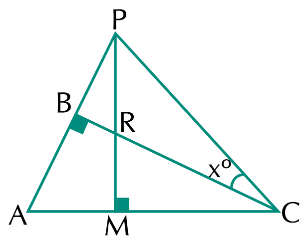
12. Si: m + n = 18 cm, calcule "m".



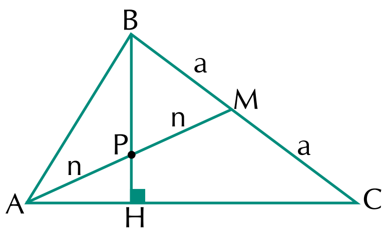
13. En el gráfico, calcule "a.b", si: a + b = 15 cm.



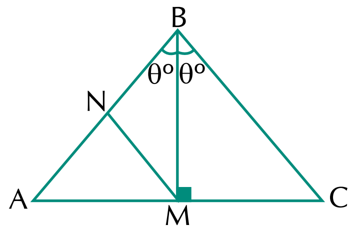
14. Calcule "x", si: RC = 2BR y AM = MC.



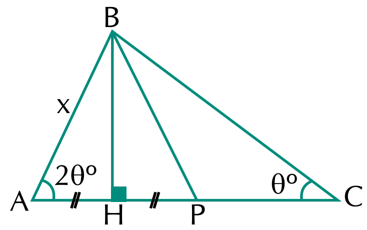
15. En el gráfico: PH = 1 cm, calcule "BH".



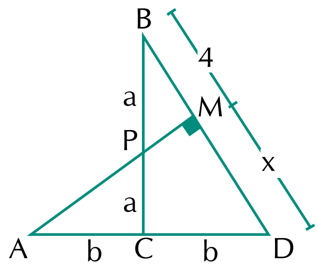
16. Si: AN = NB y BC = 48 cm, calcule "MN"



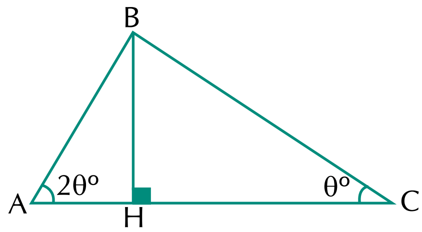
17. Si: PC = 4 cm, calcule "x".



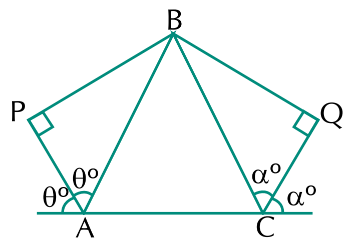
18. Calcule "x".



19. Calcule "HC", si: AB = 6 cm y AH = 2 cm.



20. Si el perímetro del triángulo ABC es 40 cm, calcule "PQ".



Polígonos

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar y reconocer al polígono y sus propiedades.
- A identificar y aplicar los tipos y propiedades de los polígonos.

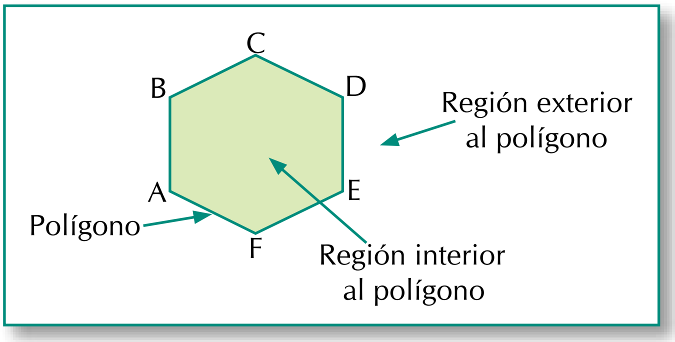
Tradicionalmente, la arquitectura ha sido considerada una de las siete Bellas Artes. Determinados edificios u otras construcciones son obras de arte ya que pueden ser considerados primariamente en función de su forma o estructura sensible o de su estética. Desde este punto de vista, aunque los medios de la arquitectura puedan consistir en muros, columnas, forjados, techos y demás elementos constructivos, su fin es crear espacios con sentido donde los seres humanos puedan desarrollar todo tipo de actividades. Es en este "tener sentido" en que puede distinguirse la arquitectura (como arte) de la mera construcción. Así es como ésta es capaz de condicionar el comportamiento del hombre en el espacio, tanto física como emocionalmente. Aunque en la actualidad suele considerarse que la principal actividad de la arquitectura va dirigida al diseño de espacios para el refugio y la habitación (las viviendas), solo a partir del siglo XIX comenzaron los arquitectos a preocuparse por el problema del alojamiento, la habitabilidad y la higiene de las viviendas, y a ampliar su ámbito de actuación más allá de los monumentos y edificios representativos.

- Muchas construcciones arquitectónicas presentan figuras poligonales en su estructura .

Conceptos básicos

Definición

Es la figura geométrica cerrada que se forma al unir consecutivamente tres o más puntos no colineales mediante segmentos de recta.



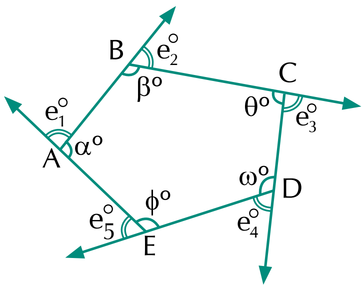
Elementos

Vértices: "A"; "B"; "C"; "D"; "E"; "F".

Lados: $\overline{AB}$; $\overline{BC}$; $\overline{CD}$; $\overline{DE}$; $\overline{EF}$; $\overline{AF}$.

Notación: Polígono ABCDEF

Ángulos determinados en el polígono



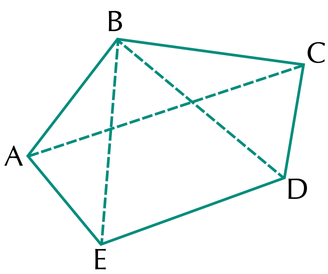
- Medida de los ángulos interiores:

  α^o; β^o; θ^o; ω^o; ϕ^o

- Medida de los ángulos exteriores:

  e_1^o ; e_2^o ; e_3^o ; e_4^o ; e_5^o

Líneas asociadas al polígono

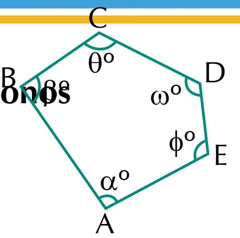


- Diagonales: $\overline{AC}$; $\overline{BE}$; $\overline{BD}$.

Clasificación de los polígonos

Por su región interior

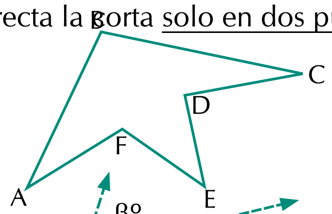
Convexo



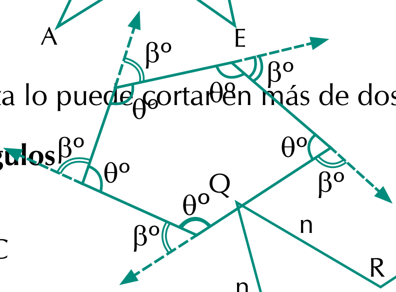
$0^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$
$0^\circ < \beta^\circ < 180^\circ$
$0^\circ < \theta^\circ < 180^\circ$
$\vdots$

una recta la corta <u>solo en dos puntos</u>

No convexo

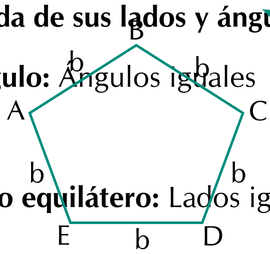


Una recta lo puede cortar en más de dos puntos.

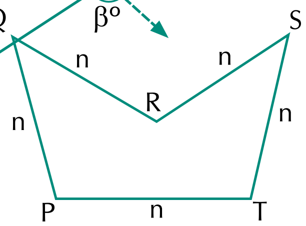


Por la medida de sus lados y ángulos

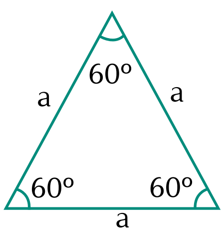
Equiángulo: Ángulos iguales



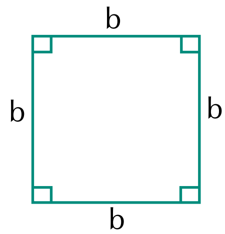
Polígono equilátero: Lados iguales



Polígono regular: Es aquel polígono equiángulo y equilátero a la vez.



Triángulo equilátero



Cuadrado

Convexo

No convexo

Por su número de lados

- Polígono de 3 lados: ....
- Polígono de 4 lados: ....
- Polígono de 5 lados: ....
- Polígono de 6 lados: ....
- Polígono de 7 lados: ....
- Polígono de 8 lados: ....
- Polígono de 9 lados: ....
- Polígono de 10 lados: ....
- Polígono de 11 lados: ....
- Polígono de 12 lados: ....
- Polígono de 15 lados: ....
- Polígono de 20 lados: ....

Propiedades en todo polígono de "n" lados

$$\text{n° de vértices} = \text{n° lados} = \text{n° ángulos internos} = n$$

Suma de medidas de los ángulos internos ($S\sphericalangle i$)

$$S\sphericalangle i = 180°(n-2)$$

Se cumple en todo polígono

Suma de medidas de los ángulos exteriores ($S\sphericalangle e$)

$$S\sphericalangle e = 360°$$

Solo para polígonos convexos

Número máximo de diagonales trazadas desde un solo vértice

$$\#D_{1\text{vértice}} = n-3$$

Número total de diagonales ($D_{totales}$)

$$\#D_{totales} = \frac{n(n-3)}{2}$$

Aplica lo comprendido

1. Calcule la suma de ángulos internos del:

   - Decágono
   - Icoságono

2. Calcule la suma de ángulos externos de:

   - Pentadecágono
   - Heptágono

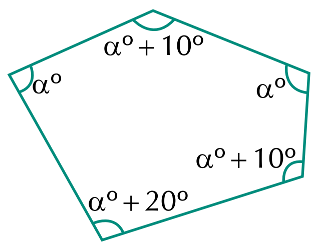
3. Calcule el número total de diagonales del:

   - Dodecágono
   - Pentágono

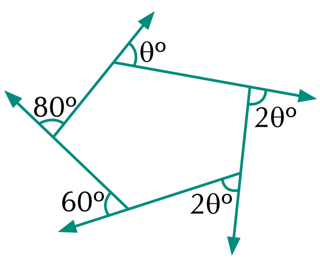
4. Calcule el número máximo de diagonales que se pueden trazar de un vértice en el:

   - Pentágono
   - Triángulo

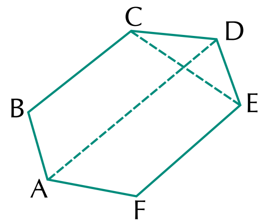
5. Calcule "$\alpha°$".



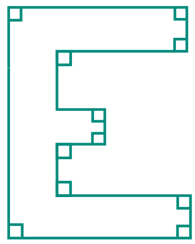
6. En el polígono mostrado, calcule "θ".



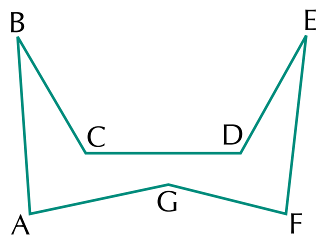
7. ¿Cuántas diagonales faltan trazar en el hexágono ABCDEF?



8. Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono mostrado.



9. Calcule el perímetro del polígono equilátero mostrado, si: $AG = 8$ cm.



10. En un polígono, la suma de los ángulos internos es 1 800°. Calcule su número total de diagonales.

Aprende más...

Comunicación matemática

1. Graficar en cada caso, usando regla.

- Un heptágono convexo ABCDEFG. Trazar las diagonales $\overline{CG}$ y $\overline{DA}$.
- El hexágono no convexo ABCDEF. Trazar las diagonales $\overline{BE}$ y $\overline{AG}$.

2. En cada caso, completar:

- Suma de ángulos internos (S_i)

  $S_i =$ ....

- Suma de ángulos externos (S_e)

  $S_e =$ ....

- Número total de diagonales (N_{T_D})

  $N_{T_D} = \dfrac{}{2}$

3. Marcar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- El polígono de acuerdo a la cantidad de lados puede ser convexo o no convexo............( )
- La diagonal es el segmento que une dos vértices consecutivos ....( )
- El lado del polígono es el segmento que une dos vértices no consecutivos......................( )

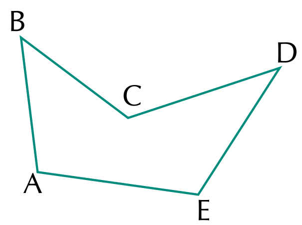
4. Comparar indicando si es mayor (>); menor (<) o igual (=)

Columna A	Signo	Columna B
Número de diagonales en el pentágono.		Número de vértices en el hexágono.

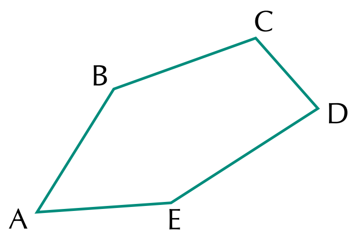
Columna A	Signo	Columna B
Suma de ángulos exteriores en polígonos convexos		Suma de ángulos internos en un triángulo.

5. Completar el gráfico.

- Traza las diagonales $\overline{BD}$; $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$.



- Indica con letras griegas, los ángulos internos de los vértices "B"; "D" y "A".



Resolución de problemas

6. Calcule la suma de ángulos internos de un:

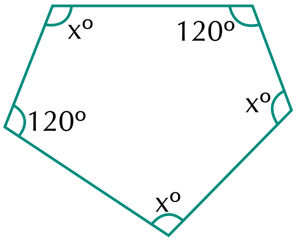
- Octógono
- Pentágono

7. Calcule el número total de diagonales de un:

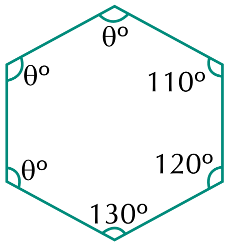
- Decágono
- Icoságono

8. ¿Cuántas diagonales como máximo se pueden trazar desde un solo vértice en un endecágono?

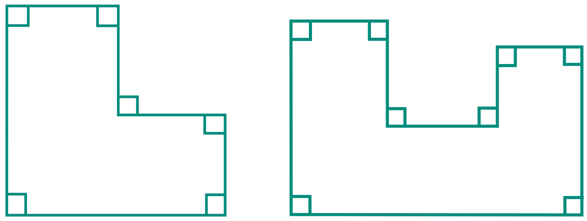
9. Calcule "x" en el gráfico.



10. Calcule "θ".



11. Calcule la suma de ángulos internos en las figuras:

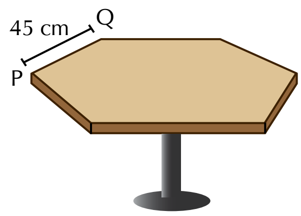


12. Calcule el número de diagonales de un polígono cuya suma de medidas de sus ángulos internos es 1 260°.

13. Calcule la suma de ángulos internos de un polígono, que tiene en total 35 diagonales.

Aplicación cotidiana

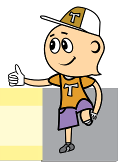
La mesa
Pedro ha comprado una mesa de forma hexagonal equilátera. Si el lado $\overline{PQ}$ mide 45 cm y Pedro desea colocar en el perímetro de la mesa un listón de aluminio.



Calcule:

14. ¿Cuántos centímetros de aluminio tendrá que comprar para dicha instalación?

15. Si el metro de aluminio tiene un costo de $40, ¿a cuánto ascenderá el costo que gastará en el aluminio comprado?

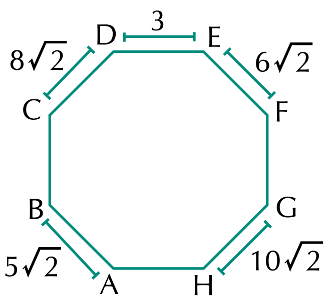


¡Tú puedes!

1. Calcule la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono cuyo número total de diagonales es el triple del número de lados.

2. ¿Cuántos lados tiene el polígono, en el cual al triplicar el número de lados, el número de diagonales aumenta en 52?

3. En el octógono equiángulo, calcule "AH".



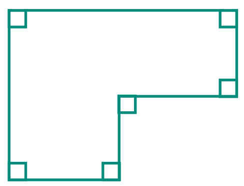
4. Al aumentar en 3 el número de lados de un polígono, su número de diagonales se triplica. ¿Cuántos lados tiene el polígono original?

5. Al aumentar en 3 el número de lados de un polígono, el número de diagonales aumenta en 30. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

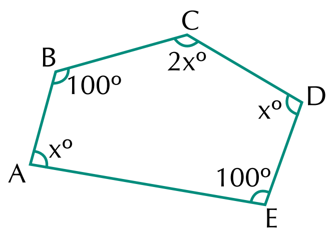
1. Calcule la suma de medidas de los ángulos internos de un pentadecágono.

2. Calcule el número total de diagonales de un decágono.

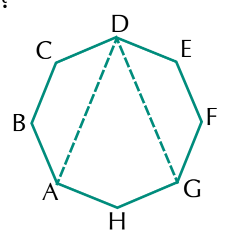
3. Calcule la suma de ángulos internos de la figura.



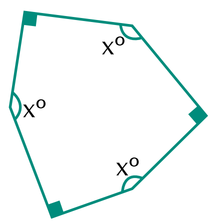
4. Calcule "x".



5. ¿Cuántas diagonales faltan trazar en el polígono ABCDEFGH?

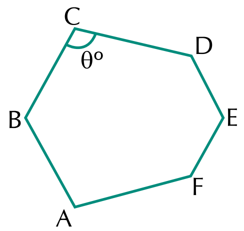


6. Calcule "x".



7. Calcule el número de vértices de un polígono, en donde la suma de sus ángulos internos es 900°.

8. En el polígono equiángulo mostrado, calcule "θ".



9. Calcule el número de lados de un polígono, en el cual desde un solo vértice se trazan como máximo 19 diagonales.

10. Calcule el número de lados de un polígono, en donde el número total de diagonales es cuatro veces el número de lados.

11. ¿En qué polígono la suma de ángulos internos es 720°?

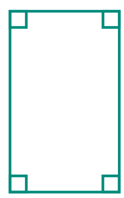
12. ¿Qué polígono tiene tantas diagonales como números de lados?

13. Calcule el número de lados del polígono en donde la suma de ángulos internos y externos es 3 960°.

14. Calcule el número de lados de aquel polígono, en el cual su número de lados más su número de diagonales es 28.

15. ¿En qué polígono equiángulo, la suma de ángulos internos es 540°?

16. Calcule la suma de ángulos internos de la figura.



17. Calcule el número total de diagonales del polígono equiángulo, cuyo ángulo interno mide 160°.

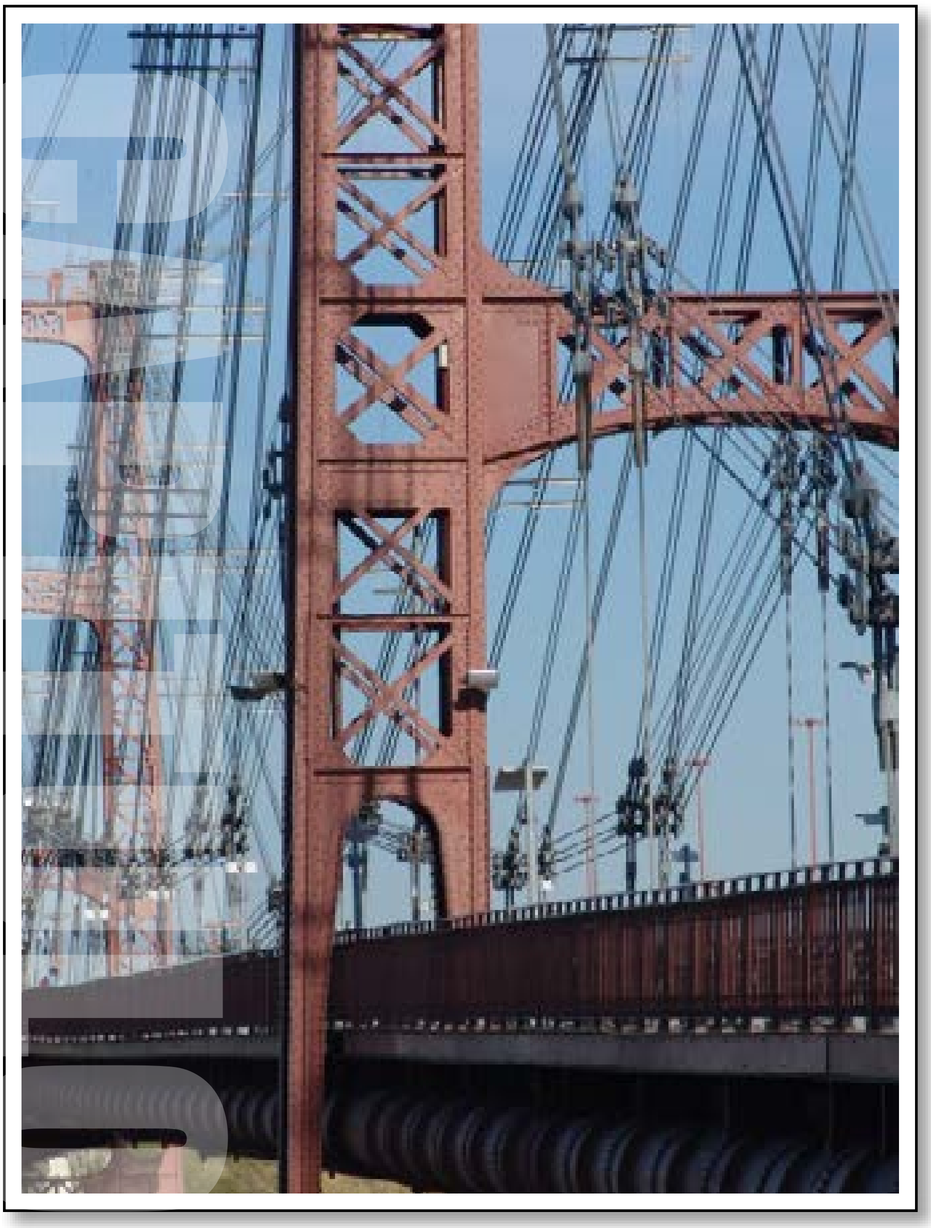
18. Graficar el octógono ABCDEFGH y trazar las diagonales $\overline{AE}$ y $\overline{AG}$.

19. Graficar el pentágono ABCDE, tal que: $m\measuredangle B = 40°$; $m\measuredangle C = 130°$ y $m\measuredangle D = 160°$. Calcule la medida del menor ángulo formado por las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DE}$.

Repaso

En este capítulo aprenderemos:

- A reforzar todo lo aprendido en el bimestre.

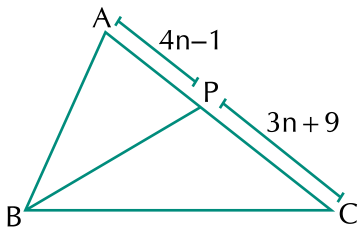


Los puentes tienen su origen en la misma prehistoria. Posiblemente el primer puente de la historia fue un árbol que usó un hombre prehistórico para conectar las dos orillas de un río. También utilizaron losas de piedra para arroyos pequeños cuando no había árboles cerca. Los siguientes puentes fueron arcos hechos con troncos o tablones y eventualmente con piedras, usando un soporte simple y colocando vigas transversales. La mayoría de estos primeros puentes eran muy pobremente construidos y raramente soportaban cargas pesadas. Fue esta insuficiencia la que llevó al desarrollo de mejores puentes. El arco fue usado por primera vez por el imperio romano para puentes y acueductos, algunos de los cuales todavía se mantienen en pie. Los puentes basados en arcos podían soportar condiciones que antes se habrían llevado por delante a cualquier puente.

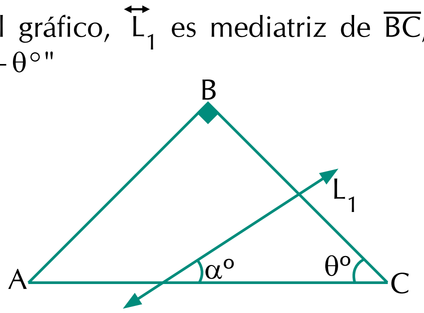
- La simetría en las estructuras ayudan a tener mayor estabilidad de las mismas .

Aplica lo comprendido

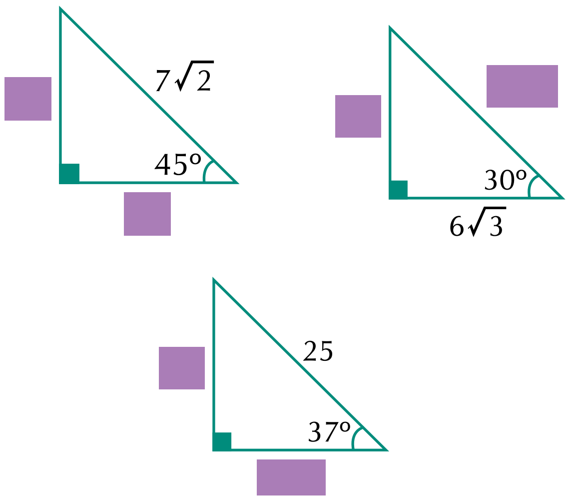
1. En el gráfico, $\overline{BP}$ es mediana, calcule "n".



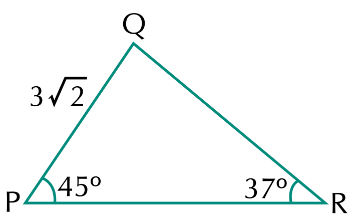
2. En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1}$ es mediatriz de $\overline{BC}$, calcule "$\alpha° + \theta°$"



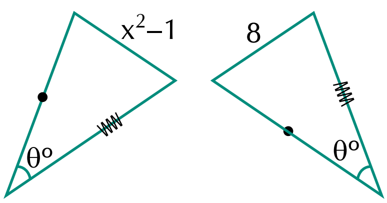
3. Completar los lados de los siguientes triángulos

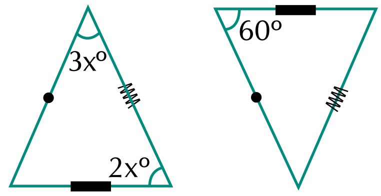


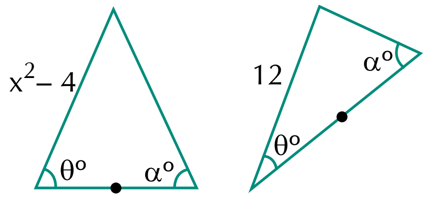
4. Calcule "PR".



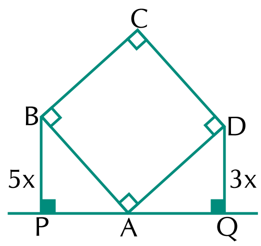
5. En cada caso, calcule "x".

- 

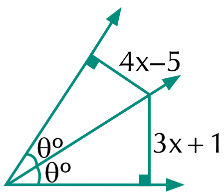
- 

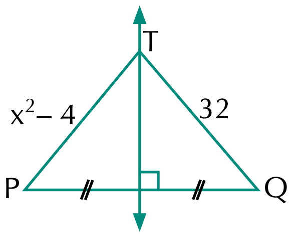
- 

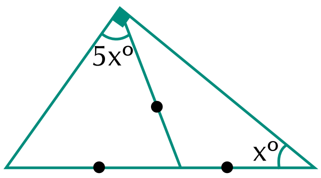
6. ABCD es un cuadrado. Calcule "x", si: PQ = 24 cm.



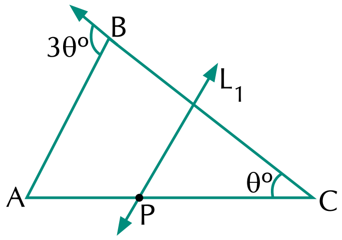
7. En cada caso, calcule "x".

- 

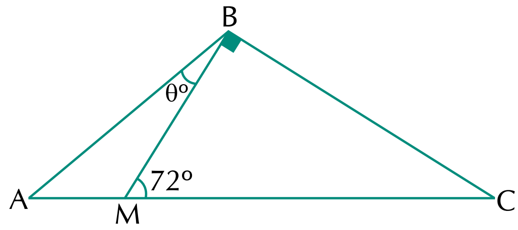
- 

- 

8. Si $\overleftrightarrow{L_1}$ es mediatriz de $\overline{BC}$, calcule "AB", si: PC = 24 cm.



9. En la figura, calcule "θ", si: MC = 2AB



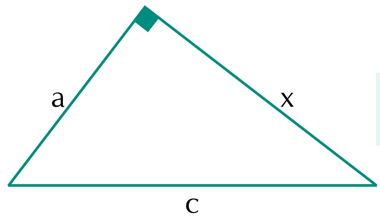
10. Calcule la suma de ángulos internos de un:

- Nonágono
- Dodecágono

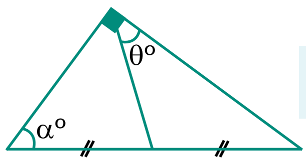
Aprende más...

Comunicación matemática

1. En cada caso, completar:

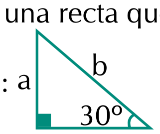
- 

$x^2 + \ldots\ldots = \ldots\ldots$

- 

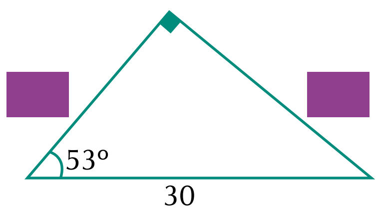
$\alpha° + \theta° = \ldots\ldots$

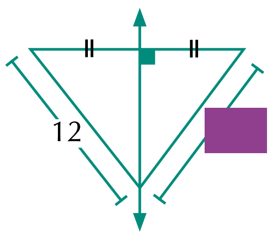
2. Indicar si es verdadero (V) ó falso (F) según corresponda.

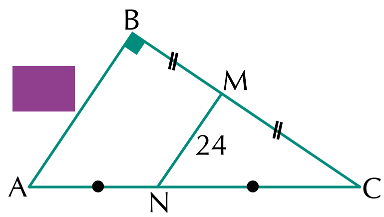
- Los únicos casos de congruencia son: LLL - ALA...(   )
- En un polígono cualquiera, la suma de los ángulos exteriores es 360°..........................(   )
- La bisectriz es una recta que divide al ángulo en tres partes iguales..............................(   )
- En el triángulo: 

$\frac{a}{b} = 3$ ....(   )

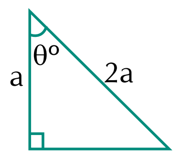
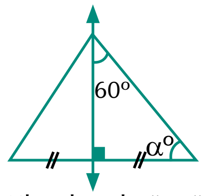
3. Completar el gráfico:







4. Comparar indicando si es ">"; "<" ó "=".

Columna A	Signo	Columna B
 El valor de "θº"		 El valor de "αº"

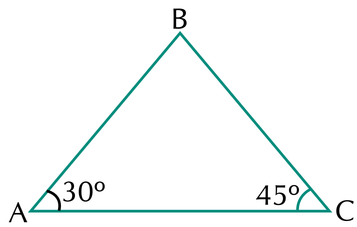
Columna A	Signo	Columna B
Suma de ángulos externos en un polígono convexo		Suma de cuatro ángulos rectos.

5. Graficar con regla

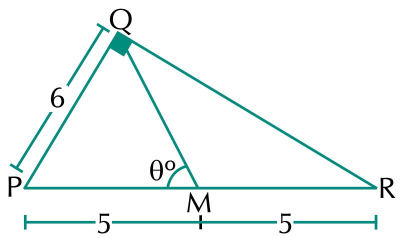
- Un triángulo rectángulo ABC, recto en "B", trazar la mediatriz de $\overline{AC}$ y la bisectriz interior del ángulo "A" que se cortan en un punto de $\overline{BC}$.
- Graficar un octógono ABCDEFGH y trazar las diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{AG}$.

Resolución de problemas

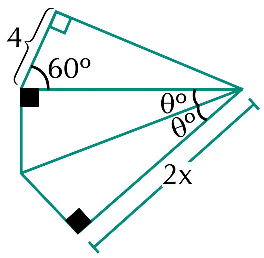
6. En el triángulo ABC, calcule "BC", si: AB = 16 cm.



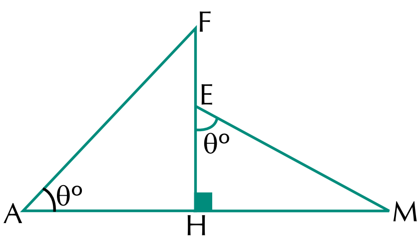
7. En el gráfico, calcule "θ".



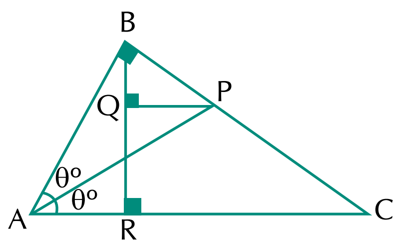
8. En el gráfico, calcule "x".



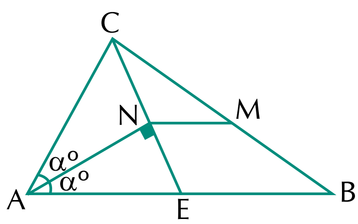
9. Calcule "AM", si: HF = 10 cm, AF = EM y FE = EH.



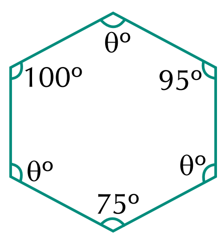
10. Calcule "PQ", si: AB = 22 cm y AR = 9 cm.



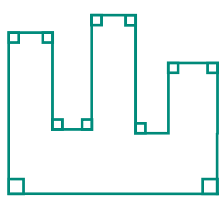
11. En el triángulo ABC: CM = MB, AC = 5m y MN = 4 m, calcule "AB".



12. Calcule "θº" en el polígono convexo.



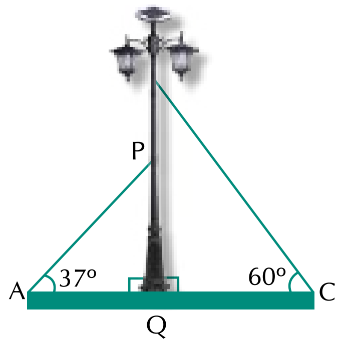
13. Calcule la suma de la medida de los ángulos interiores del polígono no convexo mostrado.



Aplicación cotidiana

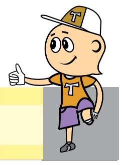
El poste

En el poste mostrado: $BP=PQ$ y $BQ=6\sqrt{3}$



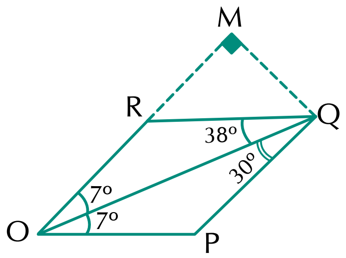
14. Calcular la longitud de las cuerdas $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ que soportan dicho poste.

15. Calcular la longitud entre los puntos "A" y "C".

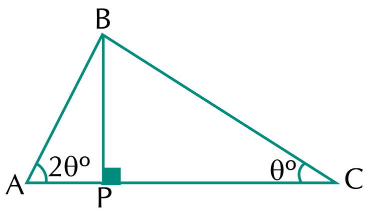


¡Tú puedes!

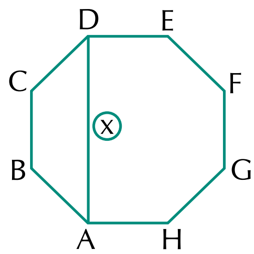
1. En el gráfico: $PQ=25$ cm, calcule "QM".



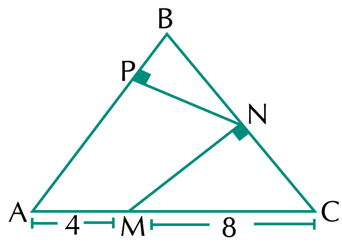
2. En el gráfico, calcule "AP", si: $PC=14$ cm y $AB=9$ cm.



3. En el octógono equiángulo mostrado: $CB=2\sqrt{2}$ m; $CD=1$ m y $BA=2$m. Calcule"AD".



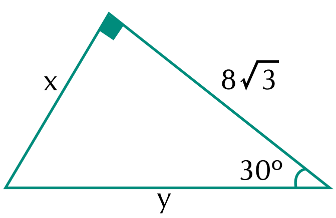
4. En el triángulo equilátero ABC, calcule: $\dfrac{MN}{NP}$



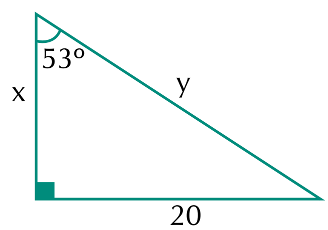
5. En un triángulo obtusángulo ABC (obtuso en "A") $m\measuredangle B=2\ m\measuredangle C$ y se traza $\overline{AP}$ perpendicular a $\overline{AC}$ ("P" en $\overline{BC}$). Calcule "PC", si: $AB=12$ cm.

Practica en casa

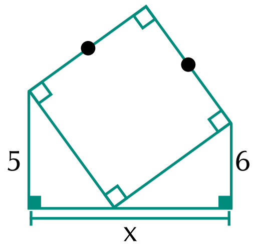
1. Calcule "x+y".



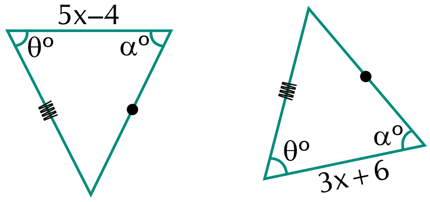
2. Calcule "x+y".



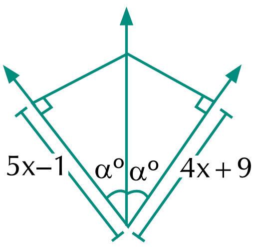
3. Calcule "x".



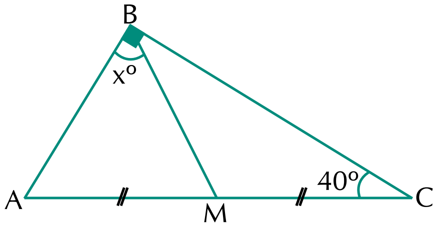
4. Calcule "x".



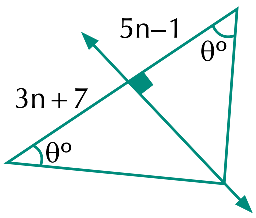
5. Calcule "x".



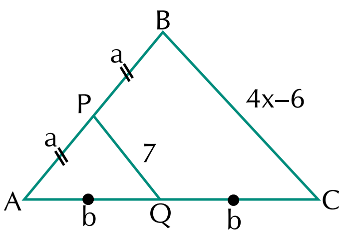
6. Del gráfico, calcule "x".



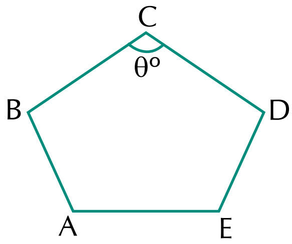
7. Calcule "n".



8. Calcule "x".



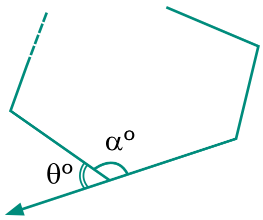
9. En el pentágono equiángulo ABCDE, calcule "θ".



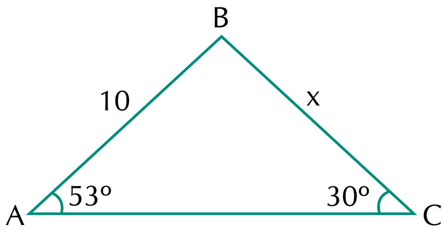
10. Calcule el número de lados de un polígono, en donde la suma de sus ángulos internos es 1 080º.

11. Calcule el número de vértices de un polígono, en donde el número de diagonales sea 35.

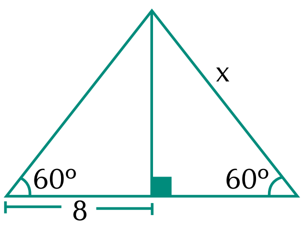
12. Si "αº" y "θº" representan un ángulo interior y un ángulo exterior de un polígono respectivamente y $\frac{\alpha}{\theta}=\frac{5}{4}$, calcule "θº".



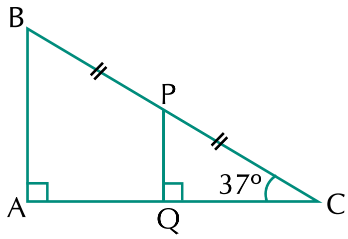
13. Calcule "x".



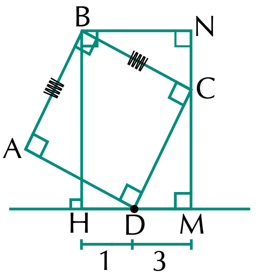
14. En el triángulo equilátero mostrado, calcule "x".



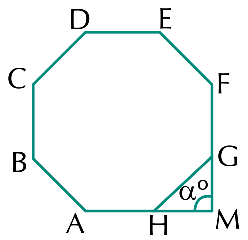
15. Calcule "AB", si: QC=8 cm.



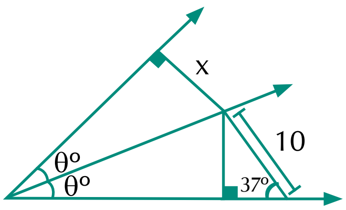
16. Calcule "BH".



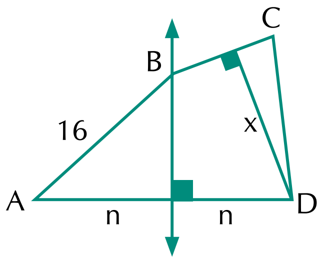
17. En el octógono ABCDEFGH equiángulo mostrado, calcule "α".



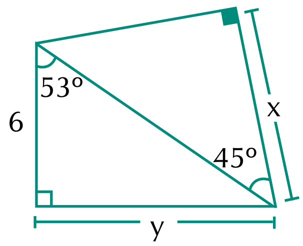
18. Calcule "x".



19. Calcule "x", si: AB = BC = CD



20. En el gráfico, calcule "x + y".



LOS POLÍGONOS Y SUS APLICACIONES

Uso del polígono de forma libre para crear un tejado.

El polígono de forma libre resulta útil para crear tejados que no son cuadrados, como los de los edificios de Venecia en Italia. La siguiente imagen contiene un edificio de Venecia cuya planta (y tejado) no tiene esquinas cuadradas (es decir, no es perfectamente rectangular)

APRENDIZAJES ESPERADOS

Comunicación matemática

- Define el polígono y los cuadriláteros, indicando sus elementos y características.
- Reconoce las propiedades de sus elementos (lados y ángulos).

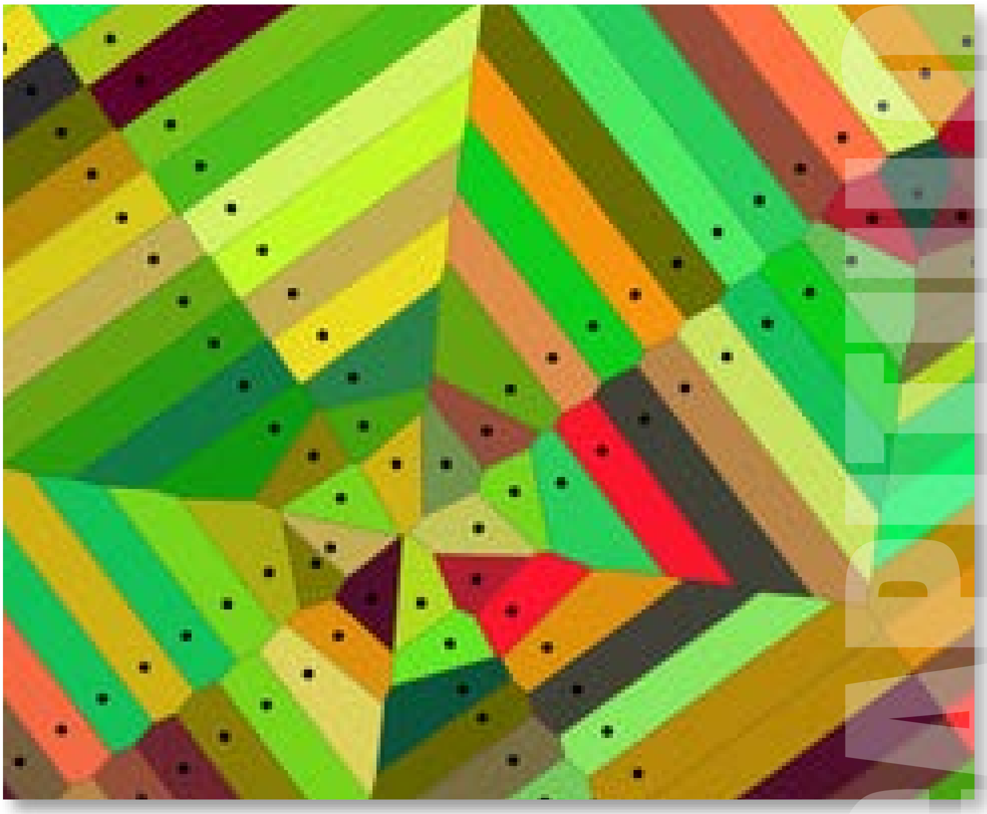
Resolución de problemas

- Analiza los datos disponibles y los relaciona con las propiedades de polígonos y cuadriláteros.
- Relaciona adecuadamente los datos numéricos y gráficos.

Polígonos regulares

En este capítulo aprenderemos:

- A definir el polígono regular, indicando sus elementos.
- A relacionar adecuadamente las propiedades de los polígonos regulares.



Los polígonos de Thiessen (también llamados diagramas de Voronoi o teselación de Dirichlet) son una construcción geométrica que permite construir una partición del plano euclídeano. Deben su nombre a Alfred H. Thiessen y también fueron estudiados por Georgy Voronoi y Gustav Lejeune Dirichlet.

Los polígonos de Thiessen son uno de los métodos de interpolación más simples, basado en la distancia euclidiana, siendo especialmente apropiada cuando los datos son cualitativos. Se crean al unir los puntos entre sí, trazando las mediatrices de los segmentos de unión. Las intersecciones de estas mediatrices determinan una serie de polígonos en un espacio bidimensional alrededor de un conjunto de puntos de control, de manera que el perímetro de los polígonos generados sea equidistante a los puntos vecinos.

Aplicaciones

Proceso llevado a cabo en un Sistema de Información Geográfica (SIG) para la obtención de ejes de calles mediante el uso de polígonos de Thiessen.

Inicialmente los polígonos de Thiessen fueron creados para el análisis de datos meteorológicos (estaciones pluviométricas) aunque en la actualidad también se aplica en estudios en los que hay que determinar áreas de influencia (centros hospitalarios, estaciones de bomberos, bocas de metro, centros comerciales, control del tráfico aéreo, telefonía móvil, análisis de poblaciones de especies vegetales, etc). Es una de las funciones de análisis básicas en los SIG.

- ¿Cuál es la importancia del trazado de las mediatrices en los polígonos de Thiessen?

Saberes previos

Del tema anterior, "Polígonos" se definía así: es la figura geométrica cerrada que se forma al unir consecutivamente tres o más puntos no colineales mediante segmentos de recta.

Elementos

Vértices y lados

Polígono convexo

Cuando sus ángulos interiores ($\measuredangle_i$) son menores a 180°.

Polígono no convexo

Cuando al menos uno de sus ángulos interiores mide entre 180° y 360°.

Propiedades

Sea: n = número de lados

$$\Rightarrow \quad S\measuredangle_i = 180°(n-2)$$

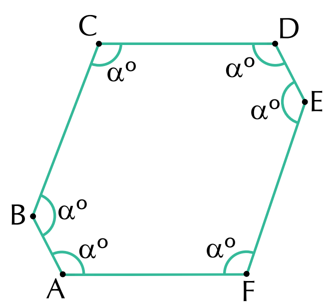
$$S\measuredangle_e = 360°$$

Conceptos básicos

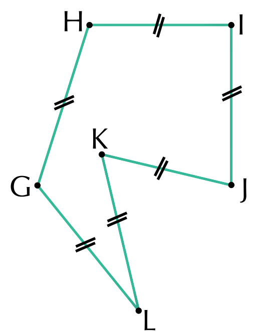
Definición

Es aquel polígono equilátero y equiángulo a la vez.

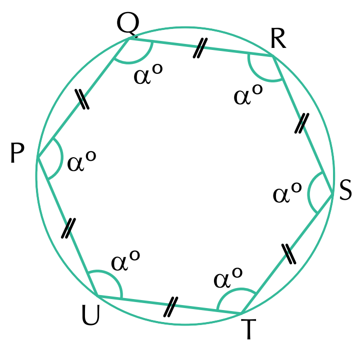
Equiángulo



Equilátero



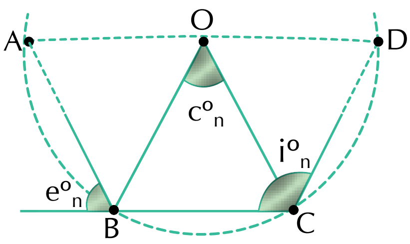
Regular



Medida de un ángulo interior: $m\measuredangle i_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$

Medida de un ángulo exterior: $m\measuredangle e_n = \dfrac{360°}{n}$

Medida de un ángulo central: $m\measuredangle c_n = \dfrac{360°}{n}$



Observación

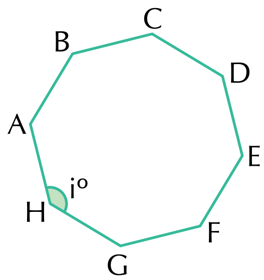
Los principales y más conocidos polígonos regulares son:

- Cuadrado
- Triángulo equilátero
- Exágono regular

Aplica lo comprendido

1. Si los polígonos son regulares, calcule la medida de cada ángulo interior

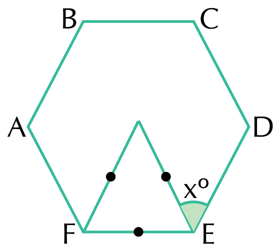
2. Si ABCDEFGH es un polígono regular, calcule "i".



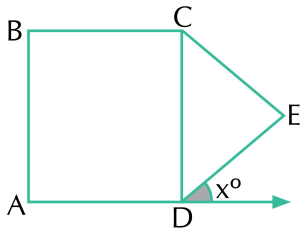
3. Calcule el número de lados de un polígono, donde la medida de su ángulo interior es de 120°.

4. Indicar el número de lados de un polígono, donde se cumple que la medida de su ángulo interior es igual a la medida de su ángulo exterior.

5. En el hexágono regular ABCDEF, calcule "x".



6. Si los polígonos ABCD y CED son regulares, hallar el valor de "x°".



Aprende más...

Comunicación matemática

1. Completar de acuerdo a las fórmulas de polígonos regulares:

∢ Interior	$\dfrac{180°.(\quad\quad)}{n}$
∢ Exterior	$\underline{360°}$

2. Completar, indicando los nombres de los polígonos regulares, cuyos ángulos interiores se dan en el cuadro.

∢ interior	Polígono regular
120°	
60°	
108°	

3. Indicar si es verdadero (V) o falso (F).

- La medida del ángulo interior de un hexágono regular es 72° ....( )
- La medida de un ángulo interior de un triángulo equilátero es 120° ....( )
- La medida de un ángulo exterior de un octógono regular es 45° ....( )
- La medida del ángulo exterior de un cuadrado es 180° ....( )

Resolución de problemas

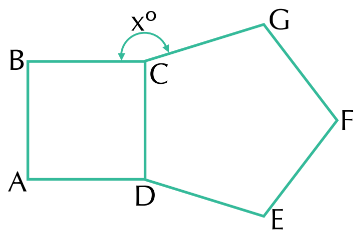
4. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos interiores de un icoságono regular?

5. Calcule la medida del ángulo central de un dodecágono regular.

6. Calcule el número de lados de un polígono, cuyo ángulo central mide 20°.

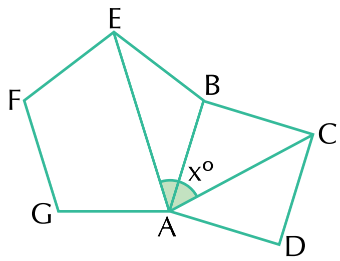
7. Nombrar el polígono regular, donde se cumple la siguiente ecuación: $m\sphericalangle c^{\circ}+m\sphericalangle e^{\circ}=m\sphericalangle i^{\circ}$.

8. Si los polígonos ABCD y CDEFG son regulares, calcule "x".

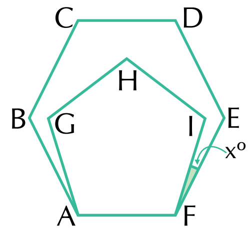


9. Calcule el número de lados del polígono en el que se cumple que la medida de su ángulo interior es 6 veces la medida de su ángulo exterior.

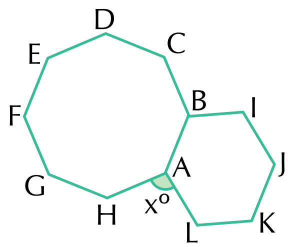
10. Si los polígonos ABCD y ABEFG son regulares, calcule "x".



11. Calcule "x", si ABCDEF y AGHIF son polígonos regulares.



12. Si los polígonos ABCDEFGH y ABIJKL son regulares, calcule "x".

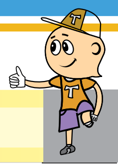


13. Calcule el número de lados de aquel polígono regular que cumple la siguiente ecuación: $m\sphericalangle i^{\circ}+m\sphericalangle e^{\circ}+m\sphericalangle c^{\circ}=204^{\circ}$.

Aplicación cotidiana

14. Se quiere colocar piso de mayólica a una habitación cuyas dimensiones son de 4×5 m. Si cada mayólica tiene forma cuadrada y su lado mide 20 cm, ¿cuántas mayólicas se necesitará para cubrir el piso de la casa?

15. Se quiere cubrir una pared con vidrios de forma triangular. La pared mide 36 m de largo y $9\sqrt{3}$ m de alto. Si el lado de cada triángulo debe ser de 6 m, ¿cuántos espejos se necesitarán para cubrir la pared?



¡Tú puedes!

1. Se tiene un polígono regular cuyo lado mide 3 m. Si su perímetro es numéricamente igual a su número de diagonales, dar el nombre del polígono.

2. Se tiene un octógono regular ABCDEFGH. Calcule la medida del mayor ángulo formado por las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

3. Calcule la medida del ángulo formado por las mediatrices de dos lados consecutivos de un nonágono regular.

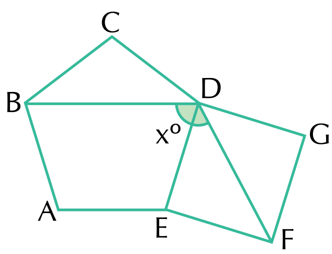
4. Al aumentar en 2 el número de lados de un polígono, la medida de su ángulo central disminuye en 9°. ¿Cuántos lados tiene el polígono inicial?

5. Se tiene un pentágono regular ABCDE y se trazan las diagonales $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. Calcule el menor ángulo que forman estos.

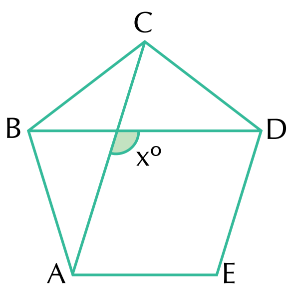
Practica en casa

1. ¿Cuánto mide el ángulo interior de un polígono de 24 lados?

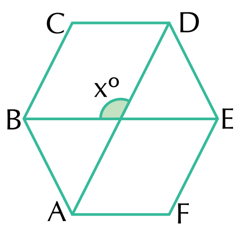
2. Calcule "x", si los polígonos ABCDE y DEFG son regulares.



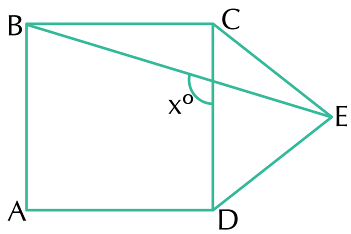
3. Si ABCDE es un polígono regular, calcule "x".



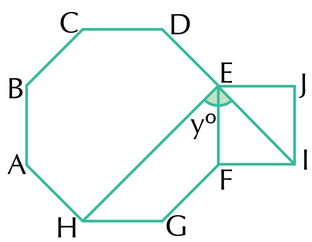
4. Si el polígono ABCDEF mostrado es regular, calcule "x".



5. Calcule "x", si los polígonos ABCD y CDE son regulares.

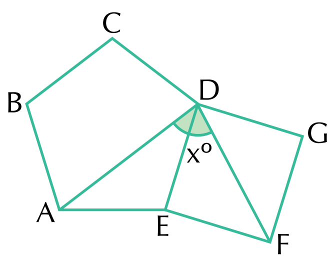


6. Si los polígonos ABCDEFGH y EFIJ son regulares, calcule "y"



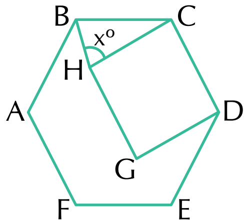
7. ¿En qué polígono se cumple que: $\dfrac{m\sphericalangle i^{o}}{m\sphericalangle c^{o}} = \dfrac{7}{2}$?

8. Calcule "x", si los polígonos ABCDE y DEFG son regulares.

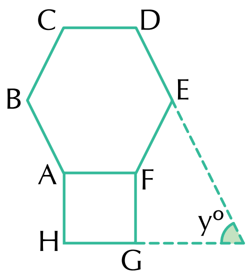


9. ¿En qué polígono regular se cumple la siguiente ecuación: $m\sphericalangle i^{o}+m\sphericalangle e^{o}+m\sphericalangle c^{o}=225^{o}$?

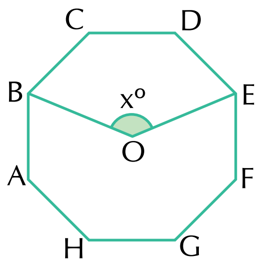
10. Si los polígonos ABCDEF y CDGH son regulares, calcule "x".



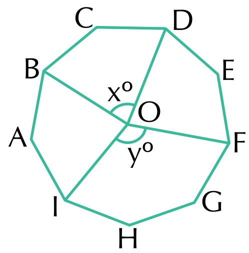
11. Si los polígonos ABCDEF y AFGH son regulares, calcule "y".



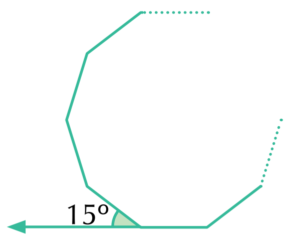
12. Si "O" es centro del polígono regular ABCDEFGH, calcule "x".



13. Calcule "x + y", en el nonágono regular ABCDEFGHI ("O" es centro).



14. Calcule el número de lados del polígono, si es regular.



15. En el polígono regular de 17 lados, ¿cuánto suman su ángulo interior y su ángulo exterior?

Cuadriláteros (trapezoides y trapecios) y áreas de regiones cuadrangulares

En este capítulo aprenderemos:

- A definir y clasificar a los cuadriláteros y precisar sus elementos.
- A aplicar las propiedades en la resolución de problemas.
- A aplicar las fórmulas para el área de las regiones cuadrangulares (trapezoide y trapecio).

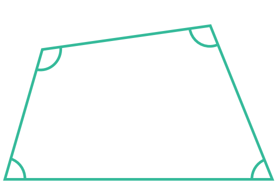
En arquitectura, al "cuadrilátero" se le conoce como un espacio o un patio, generalmente cuadrado o rectángulo en el plano, los lados del cual son ocupados enteramente o principalmente por las partes de un edificio grande. La palabra probablemente se asocia lo más de cerca posible a universidad o universidad campus, pero los cuadriláteros se pueden encontrar en otros edificios por ejemplo palacios. La mayoría de los cuadriláteros están al aire libre, mientras que algunos se han esmaltado encima a menudo para proporcionar el espacio adicional para las áreas sociales de la reunión o las tiendas de café para los estudiantes.

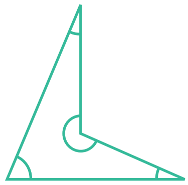
Algunos cuadriláteros modernos llevan una semejanza que pasan a ser jardines de medieval monasterios, que eran generalmente cuadrados o los jardines o los céspedes rectangulares que incluyeron por abierto arcadas. Sin embargo está claro de los más viejos ejemplos (por ejemplo: cuadrángulo de la multitud) cuál es llano y adornado con las arcadas, eso en las universidades medievales en Oxford y Cambridge creaban la comodidad práctica para los miembros de la universidad. Cuadriláteros más magníficos que parecen cloisters vinieron más adelante, la idea de una universidad eran una vez establecidos se hicieran edificios más monumentales.

- En la arquitectura, ¿qué formas tienen generalmente los cuadriláteros?

Saberes previos

- Los polígonos de cuatro lados pueden ser:

Convexo: 

No convexo: 

- Propiedades:
(cuando: n = 4)

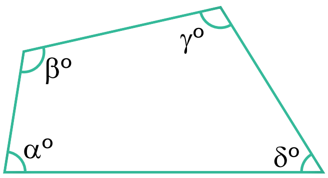
$S\sphericalangle_i = 180°(n - 2) \Rightarrow S\sphericalangle_i = 180°(4 - 2) \Rightarrow \boxed{S\sphericalangle_i = 360°}$

Conceptos básicos

Cuadrilátero

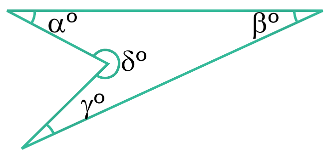
Es aquel polígono de cuatro lados, de tal forma que cualquier par de segmentos no es colineal, los segmentos solo tienen en común sus extremos.

Cuadrilátero convexo



$$\alpha° + \beta° + \gamma° + \delta° = 360°$$

Cuadrilátero no convexo



Los cuadriláteros se dividen en: trapezoides, trapecios y paralelogramos.

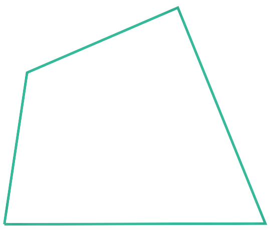
En el presente capítulo, estudiaremos los dos primeros.

Trapezoides

Es aquel cuadrilátero que no presenta lados paralelos.

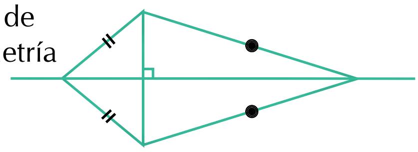
Clasificación

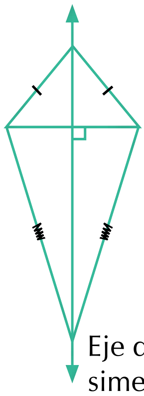
Asimétrico



Simétrico

Eje de simetría



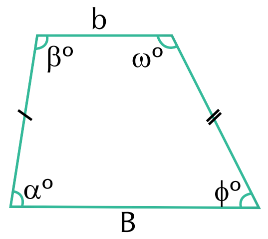


Eje de simetría

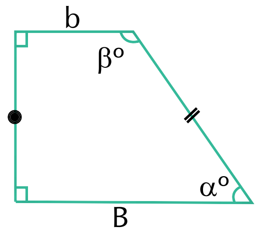
Trapecios

Es aquel cuadrilátero convexo que solo tiene un par de lados paralelos, a los cuales se les denomina bases

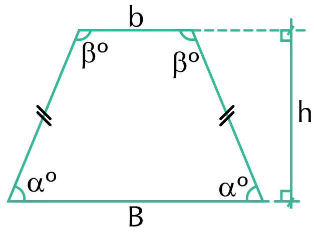
Clasificación



Trapecio escaleno



Trapecio rectángulo

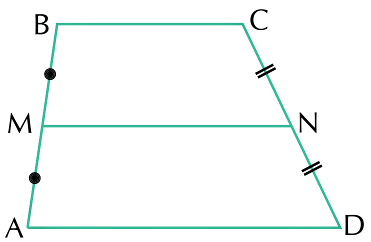


Trapecio isósceles

De los gráficos se concluye que: $\begin{cases} \alpha^o + \beta^o = 180^o; \\ \omega^o + \phi^o = 180^o; \end{cases}$ b: base menor; h: altura.
B: base mayor

Propiedades

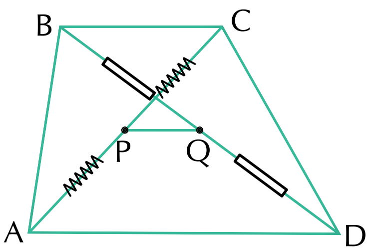
1. Base media: Es el segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.



- $\overline{MN} \,//\, \overline{BC} \,//\, \overline{AD}$

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

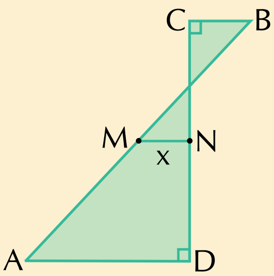
2. Segmento que une los puntos medios de las diagonales



- $\overline{PQ} \,//\, \overline{BC} \,//\, \overline{AD}$

$$PQ = \frac{AD - BC}{2}$$

Observación

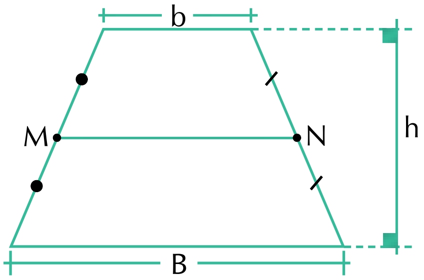


"M": punto medio de $\overline{AB}$
"N": punto medio de $\overline{CD}$

- $\overline{MN} \,//\, \overline{CB} \,//\, \overline{AD}$

$$MN = \frac{AD - CB}{2}$$

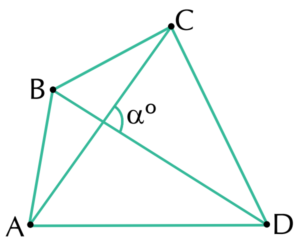
Áreas de regiones cuadrangulares



$$Área = \left(\frac{B+b}{2}\right)h$$

Nota: $\frac{B+b}{2} = MN$ (mediana)

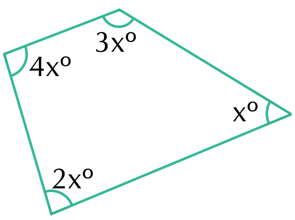
También: $Área = MN.h$



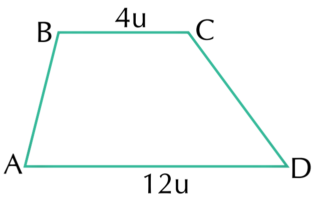
$$Área = \frac{AC.BD}{2} sen\alpha°$$

Aplica lo comprendido

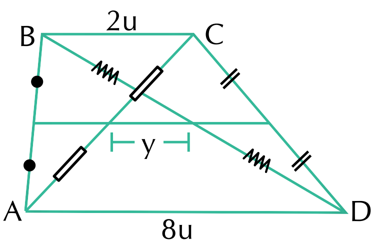
1. Calcule "x" en el siguiente gráfico



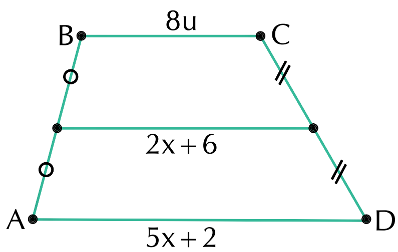
2. • Calcule la mediana en el trapecio ABCD.



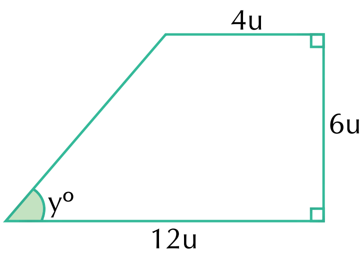
• Calcule "y" en el siguiente gráfico (ABCD: trapecio)



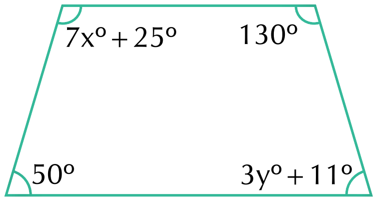
3. Calcule "x + 2", en el trapecio ABCD mostrado.



4. Calcule "y" en el siguiente gráfico.



5. En el trapecio mostrado, calcule "x + y"

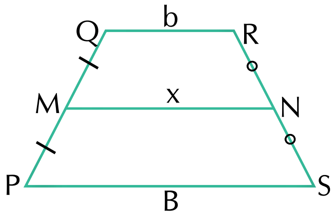


6. Calcule el área de un trapecio, donde la base menor mide 4u, la base mayor es el triple de la base menor y la altura es el doble de la base menor.

Aprende más...

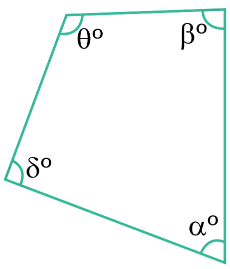
Comunicación matemática

1. En el trapecio PQRS mostrado, indicar si es verdadero (V) o falso (F)



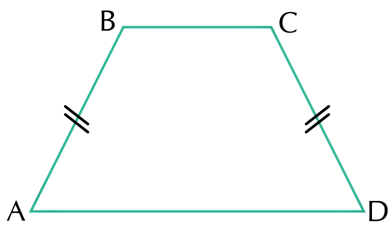
- $\overline{MN} // \overline{PS} // \overline{QR}$ .... (   )
- $x = \dfrac{B+b}{2}$ .... (   )
- $x > b$ .... (   )

2. En el trapezoide mostrado, indicar si es verdadero (V) o falso (F)



- $\alpha^\circ + \theta^\circ = 180^\circ$ .... (   )
- $\alpha^\circ + \beta^\circ + \theta^\circ + \delta^\circ = 360^\circ$ .... (   )
- $\delta^\circ + \theta^\circ = 180^\circ$ .... (   )

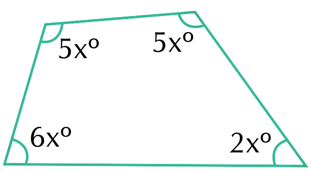
3. En el trapecio ABCD mostrado, indicar si es verdadero (V) o falso (F).



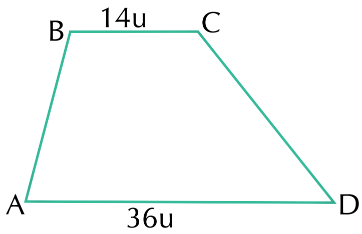
- $m\measuredangle A = m\measuredangle D$...............................(   )
- $AC = BD$ ....(   )

Resolución de problemas

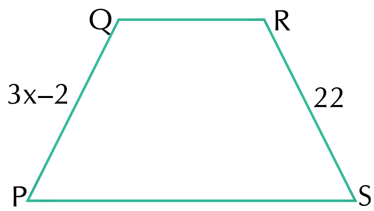
4. Calcule "x" en el siguiente gráfico.



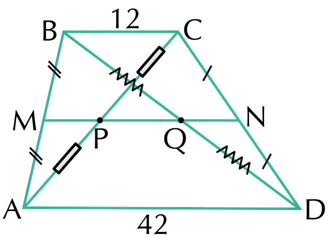
5. Calcule el valor de la mediana, en el trapecio ABCD mostrado.



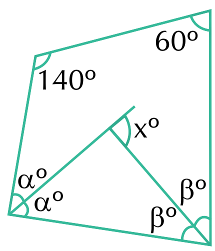
6. Si PQRS es un trapecio isósceles, calcule "x".



7. En el trapecio ABCD mostrado, calcule "MN" y "PQ".



8. Calcule "x" en el gráfico mostrado.



9. Las longitudes de la base media y del segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio miden 14 y 6u. Calcule el cociente entre la base mayor y la base menor respectivamente.

10. Calcule el área de la región de un trapecio, cuyas bases miden 6 y 12u y su altura mide 8u.

11. Las diagonales de un trapezoide miden 16 y 18u. Si el ángulo que forman estas diagonales mide 45º, calcule el área de su región.

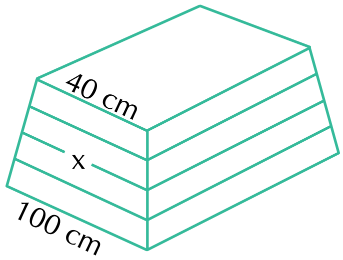
- Nota: $\text{sen}45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

12. El área de la región de un trapecio es de $56u^2$. Si sus bases miden 4 y 10u, calcule su altura.

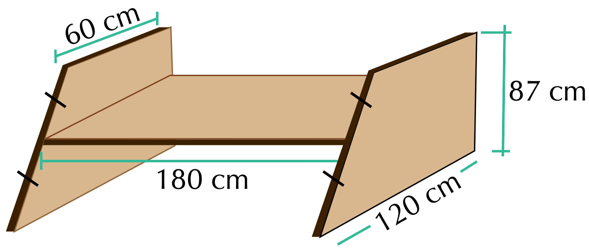
13. Las medidas de los ángulos de un trapezoide están en progresión aritmética cuya razón es 10°. Calcule el mayor ángulo de dicho trapezoide.

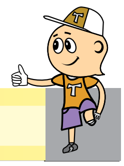
Aplicación cotidiana

14. Un taburete tiene una sección cuya forma es la de un trapecio isósceles. Si la base menor mide 40 cm y la base mayor mide 100 cm, calcular el ancho de la sección media.



15. En la siguiente mesa, se requiere calcular el área del material a usar.





¡Tú puedes!

1. En un cuadrilátero ABCD, se cumple que: $m\sphericalangle A + m\sphericalangle D = 140°$. Calcule la medida del ángulo formado por la bisectriz interior del ángulo "A" con la bisectriz exterior del ángulo "D".

2. Se tiene un cuadrilátero ABCD de lados iguales, donde cada lado mide 6u. Si uno de sus ángulos mide 60°, calcule la longitud de la diagonal menor de dicho cuadrilátero.

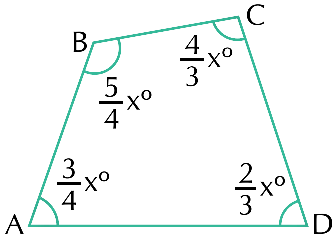
3. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de las bases de un trapecio, si la suma de las medidas de los ángulos adyacentes a la base mayor es de 90° y las longitudes de las bases se difieren en 48 cm.

4. Las diagonales de un trapecio son perpendiculares entre sí y miden 6 y 8u. Calcule la longitud de su mediana.

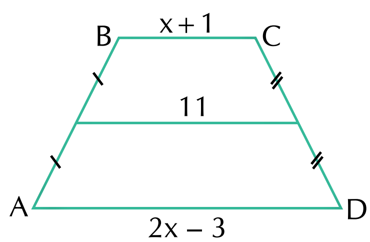
5. En un trapecio rectángulo ABCD: $m\sphericalangle A = m\sphericalangle B = 90°$; $m\sphericalangle D = 75°$ y la base mayor $\overline{AD}$ es el doble de $\overline{AB}$. Calcule: $m\sphericalangle BCA$.

Practica en casa

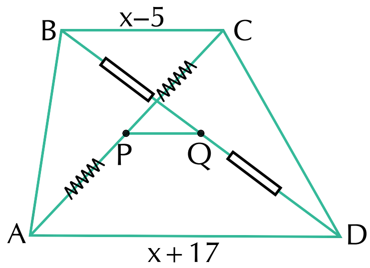
1. Del trapezoide mostrado, calcule: $m\sphericalangle D$.



2. En el trapecio ABCD mostrado, calcule "3x – 2".

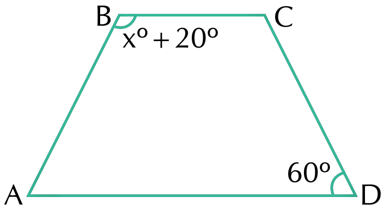


3. En el trapecio ABCD mostrado, calcule "PQ"

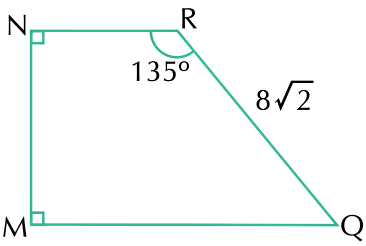


4. Las bases de un trapecio miden 6 y 20u. Calcule el cociente que se obtiene entre la mediana y el segmento que une los puntos medios de las diagonales.

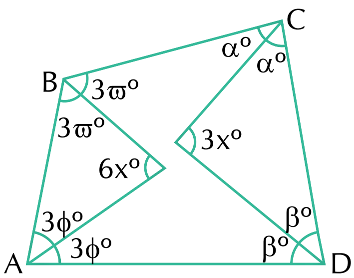
5. Calcule "x°" en el trapecio isósceles ABCD



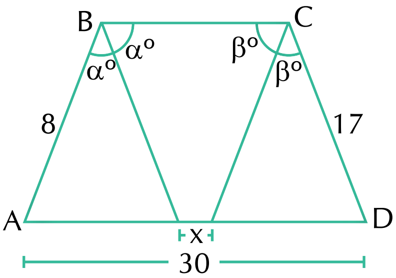
6. En el gráfico, calcule "MQ", si: MN = 2NR



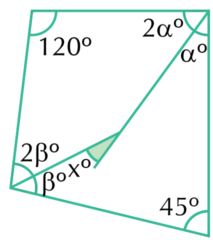
7. De acuerdo al trapezoide ABCD mostrado, calcule "x°".



8. Si ABCD es un trapecio, calcule "x".

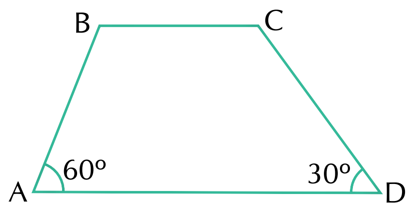


9. En el trapezoide mostrado, calcule "x°"



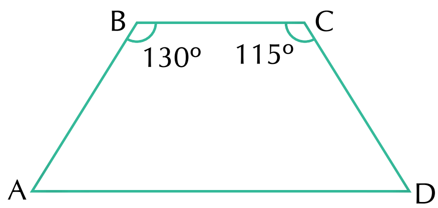
10. En un trapecio, la longitud de la mediana es el triple de la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales. Si la base menor mide 16u, calcule la longitud de la base mayor.

11. En el trapecio ABCD mostrado se sabe que: BC = 6u y CD $=10\sqrt{3}$ u, calcule "AD"



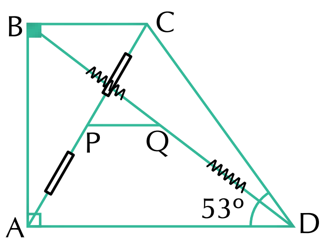
12. Si la mediana de un trapecio mide 10 u y su altura 15 u, calcule el área de la región trapezoidal.

13. Si: $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$ y AD – AB = 48 u, calcule "BC".



14. La base menor, la base mayor y la altura de un trapecio están en la relación de 4; 8 y 5 u. Si el área de dicha región es de 750 u^2, hallar la altura.

15. Del gráfico, calcule "PQ", si: CD = 40 u



Cuadriláteros (Paralelogramos) y áreas de regiones cuadrangulares

En este capítulo aprenderemos:

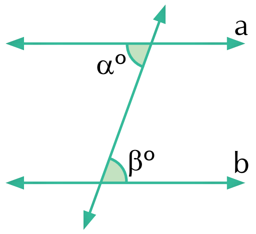
- A conocer el tercer grupo de cuadriláteros, los paralelogramos y sus respectivas propiedades.
- A comprender las relaciones entre los ángulos, lados, perímetros y áreas.

En la geología o la geografía, la palabra "cuadrilátero" se refiere generalmente a la encuesta sobre geología en Estados Unidos (USGS) que es un mapa minucioso del cuadrilátero 7.5, que se nombran generalmente después de una característica physiographic local. La taquigrafía "cuadrángulo" también se utiliza, especialmente con el nombre del mapa; por ejemplo, "el cala del guardabosques, mapa del cuadrángulo de Tejas". Estos mapas aparecen rectangulares, por lo tanto el uso de la palabra "cuadrilátero" los describe. Como término que examina, un cuadrilátero es un área que se puede subdividir en 16 municipios, y tiene límites generalmente el medir de 24 millas en cada lado, aunque esta distancia no es exacta debido a los efectos de examinar y de trazar la superficie curvada de la tierra. En un mapa minucioso del cuadrilátero de USGS 7.5, los límites del norte y del sur del cuadrilátero no son líneas rectas, sino se curvan realmente a las líneas de la tierra de latitud en la proyección estándar. Los límites del este y del oeste no son generalmente paralelos pues emparejan las líneas de la tierra de longitud.
La superficie de otros planetas también han sido divididas en cuadriláteros por el USGS. Los cuadriláteros de Martian también se nombran después de características locales.

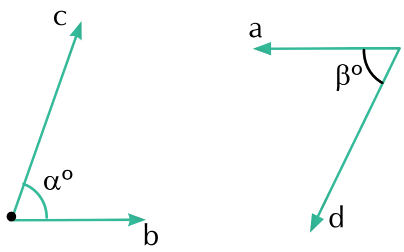
- ¿Cuál es la importancia del cuadrilátero en la encuesta sobre geología en Estados Unidos?

Saberes previos

- Polígonos equiángulos: cuyos ángulos son de igual medida
- Polígonos equiláteros: cuyos lados son de igual medida.



Si: $\overleftrightarrow{a} \,//\, \overleftrightarrow{b} \rightarrow \alpha° = \beta°$

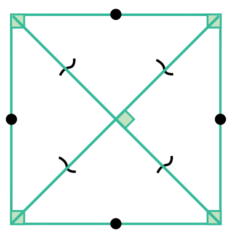


Si: $\overleftrightarrow{a} \,//\, \overleftrightarrow{b}$ y $\overleftrightarrow{c} \,//\, \overleftrightarrow{d} \Rightarrow \alpha° = \beta°$

Conceptos básicos

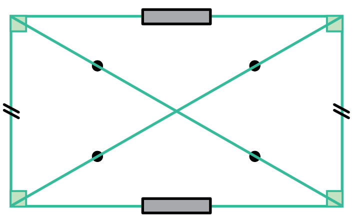
PARALELOGRAMOS

CUADRADO



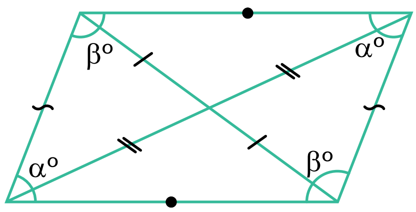
Es aquel paralelogramo cuyos lados son de igual longitud y sus ángulos interiores son rectos.

RECTÁNGULO



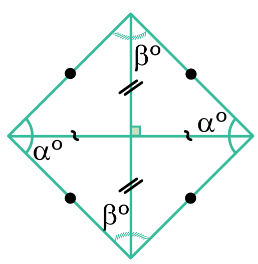
Es aquel paralelogramo cuyos lados consecutivos son de diferente longitud y sus ángulos internos miden 90°.

ROMBOIDE



Es aquel paralelogramo cuyos lados consecutivos son de diferente longitud y sus ángulos internos no son ángulos rectos.

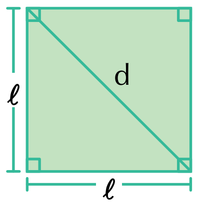
ROMBO



Es aquel paralelogramo cuyos lados son de igual longitud y sus respectivos pares angulares no son rectos.

Áreas de regiones cuadrangulares

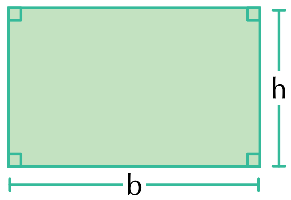
- **Cuadrado**



$\text{Área} = \ell^2$

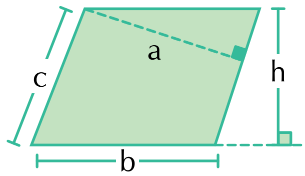
$\text{Área} = \dfrac{d^2}{2}$

- **Rectángulo**



$\text{Área} = b \, . \, h$

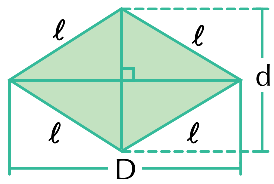
- **Romboide**



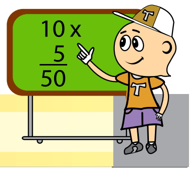
$\text{Área} = b \, . \, h$

$\text{Área} = a \, . \, c$

- **Rombo**

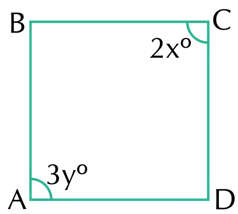


$\text{Área} = \dfrac{D.d}{2}$

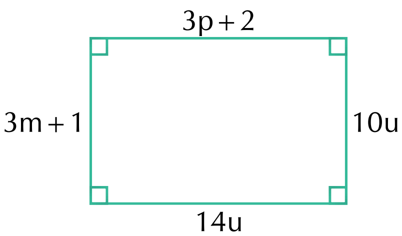


Aplica lo comprendido

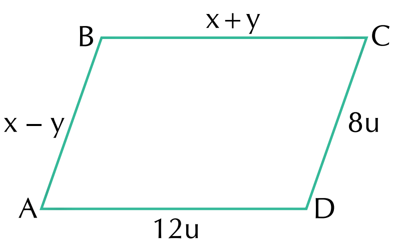
1. Si ABCD es un cuadrado, calcule "x + y"



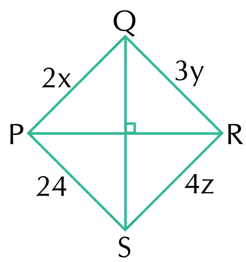
2. Del gráfico, calcule "m + p"



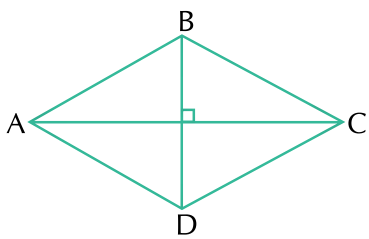
3. Si ABCD es un romboide, calcule "x . y"



4.
- Si PQRS es un rombo, calcule "x + y + z"

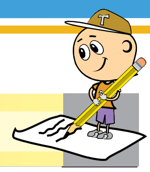


- Si ABCD es un rombo y además: BD = 6u y AC = 8u, calcule el perímetro del rombo.



5. Si el perímetro de un cuadrado ABCD es de 20u, calcule el valor de su región cuadrangular.

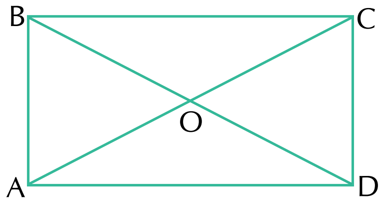
6. Si las diagonales de un rombo miden 10 y 20u, calcule el área de su región.



Aprende más...

Comunicación matemática

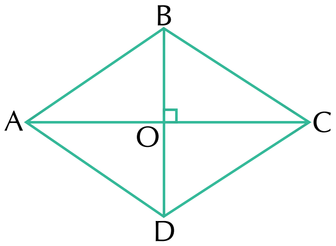
1. Completar según corresponda, indicando si es mayor, menor o igual ("<"; ">" o "=").



Si ABCD es un rectángulo, entonces:

a) AC .... BD
b) CD .... AB
c) AD .... AC

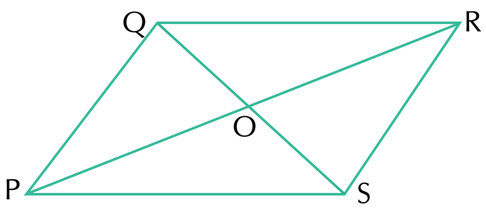
2. Completar según corresponda, indicando si es mayor, menor o igual ("<"; ">" o "=").



Si ABCD es un rombo, entonces:

a) AB .... DC
b) AO .... BC
c) BO ....OD

3. Completar según corresponda, indicando si es mayor, menor o igual ("<"; ">" o "=").



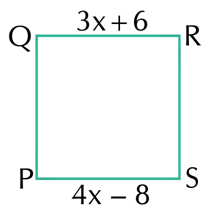
Si PQRS es un romboide, entonces:

a) PQ .... RS
b) PO .... OR
c) PR .... QR

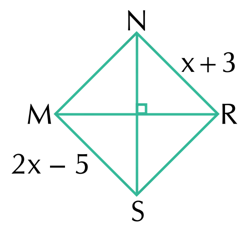
Resolución de problemas

4. Si ABCD es un rectángulo, calcule "x + y"

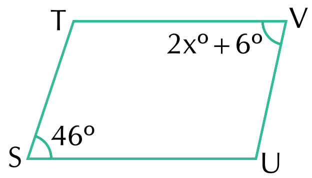
5. Si PQRS es un cuadrado, calcule "x"



6. Si MNRS es un rombo, calcule su perímetro.



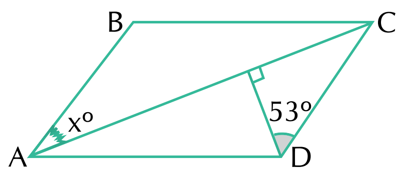
7. Si STVU es un romboide, calcule "x".



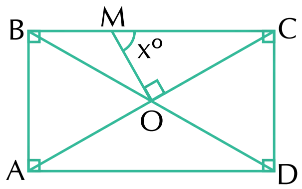
8. Las diagonales de un rombo están en la relación de 3 a 4. Si su perímetro es de 80u, calcule el área de su región.

9. En el interior de un rectángulo ABCD, se dibuja el triángulo AMD ("M" $\in \overline{BC}$). Si la m∢BAM = 30° y m∢CMD = 60°, calcule: m∢AMD.

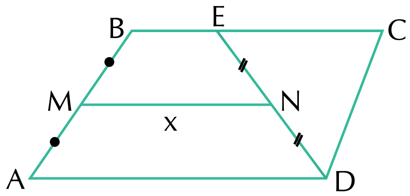
10. Si ABCD es un romboide, calcule "x"



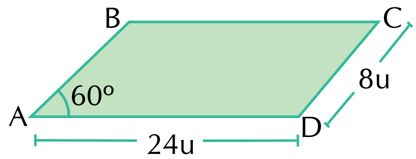
11. Calcule "x", si: OD = CD (ABCD: rectángulo).



12. Si ABCD es un romboide, $\overline{DE}$ es bisectriz, CD = 10u y AD = 15u, calcule "x".

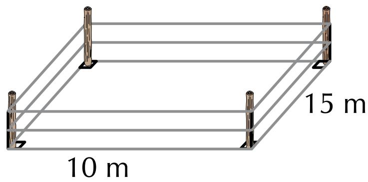


13. Calcule el área de la región sombreada, si ABCD es un romboide.

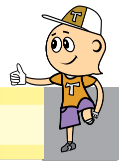


Aplicación cotidiana

14. Se desea cercar un terreno de forma rectangular para sembrar y por eso se coloca dos cuerdas por cada lado. Hallar el área de la región rectangular y el perímetro total que se obtiene al cercar con la cuerda.



15. Se desea empapelar dos paredes opuestas de un cuarto. Una pared tiene una longitud de 4,50m por 2,30m y la otra pared tiene una longitud de 4,80m por 2,30m. ¿Cuál es el área del cuarto que se desea empapelar?



¡Tú puedes!

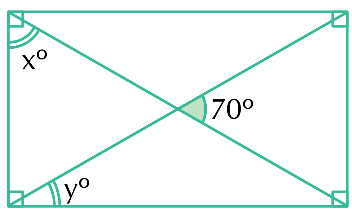
1. En un romboide ABCD, "M" es punto medio de $\overline{CD}$. Luego por "D" se levanta una perpendicular a $\overline{AD}$ que corta a $\overline{BM}$ en "R". Calcule "AR", si: BR = 5u y RM = 2u.

2. En un romboide ABCD, se traza $\overline{BP}$ y $\overline{DQ}$ perpendiculares a $\overline{AC}$, tal que: AB = PQ y $m\measuredangle ABP = 53°$. Calcule: $m\measuredangle ACB$.

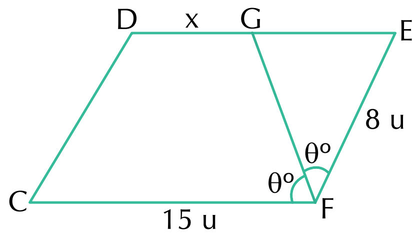
3. En un romboide ABCD, por el vértice "A" se traza una recta secante que intersecta a la prolongación del lado $\overline{DC}$ en "Q". Además la altura $\overline{DH}$ ("H" en $\overline{AB}$) intersecta al segmento $\overline{AQ}$ en "M". Si: $2(m\measuredangle BAM) = m\measuredangle MAD$ y BC = 24 u, calcule "MQ".

Practica en casa

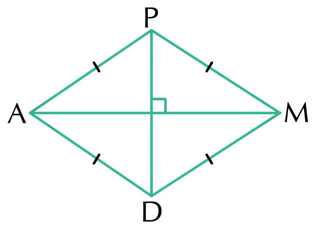
1. Calcule "x – y", en el rectángulo mostrado.



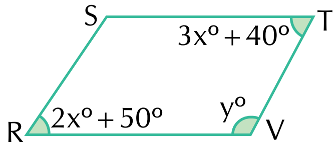
2. Calcule "x", en el romboide CDEF mostrado.



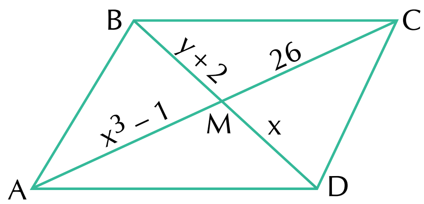
3. Calcule el perímetro del rombo APMD, si: AM = 24 u y PD = 10 u.



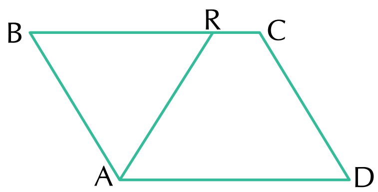
4. Calcule "y", si RSTV es un romboide



5. Si ABCD es un romboide, calcule "x – y".



6. Si ABCD es un romboide y $\overline{AR}$ es bisectriz, calcule "BR". Además: CD = 10u.

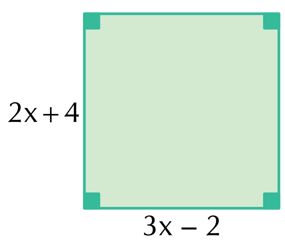


7. Calcule el área de la región de un cuadrado, cuya diagonal mide $10\sqrt{2}$ u.

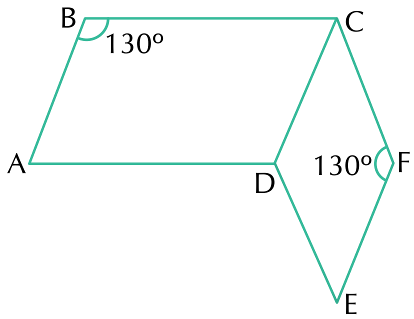
8. Calcule el área de la región de un rectángulo, cuya diagonal es el doble de su lado menor, siendo el lado mayor $20\sqrt{3}$.

9. Los lados de un rectángulo son proporcionales a 5 y 12. Calcule el área de su región, si su diagonal mide 104 u.

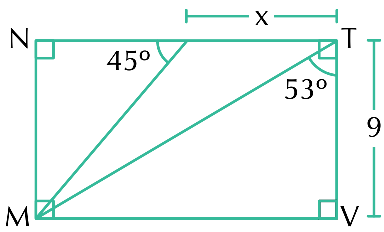
10. Calcule el área de la figura sombreada, si es un cuadrado.



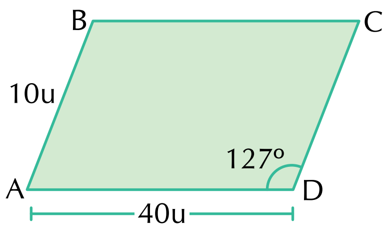
11. Si ABCD es un romboide y DCFE un rombo, calcule: m∢BCF.



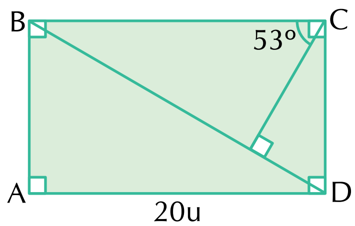
12. Si MNTV es un rectángulo, calcule "x".



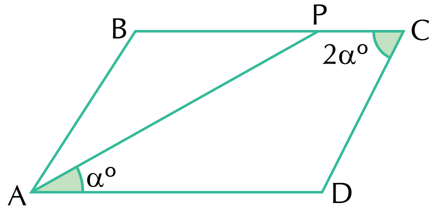
13. Calcule el área de la región sombreada, si ABCD es un romboide.



14. Calcule el área de la región sombreada, si ABCD es un rectángulo.



15. Si ABCD es un romboide y además: PC = 6u y CD = 9u, calcule "AD".



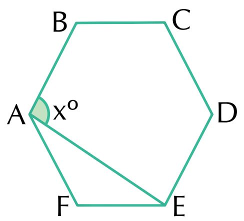
Repaso

En este capítulo aprenderemos:

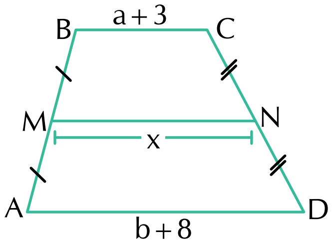
- A repasar y acentuar los conceptos ya estudiados.
- A reconocer los diferentes tipos de problemas.

Aprende más...

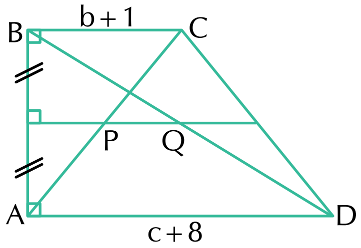
1. Calcule "x", si la figura ABCDEF es un polígono regular.



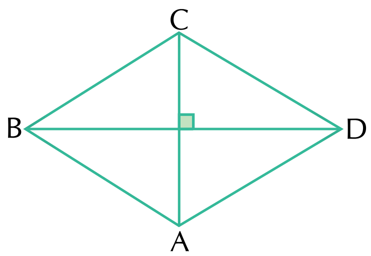
2. Si ABCD es un trapecio y a + b = 7u, calcule "x"



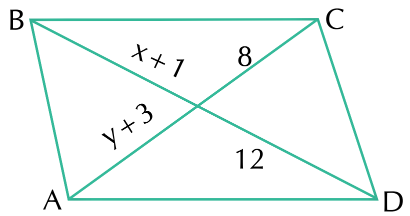
3. Calcular "PQ", si: c – b = 3u y además ABCD es un trapecio rectángulo



4. Si ABCD es un rombo y además AC = 20u y BD = 48u, calcule el perímetro del rombo.

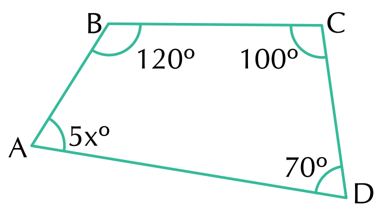


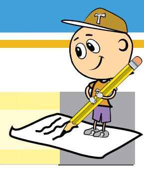
5. Si ABCD es un romboide, calcule "x – y"



6. Calcule la medida del ángulo central de un polígono de 20 lados.

7. De acuerdo al trapezoide ABCD mostrado, calcule "x".





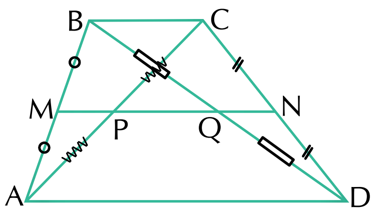
Aprende más...

Comunicación matemática

1. Completar:

	Número de lados
Icoságono	
Nonágono	
Octógono	
Dodecágono	

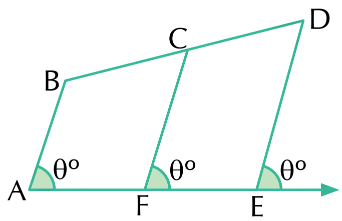
2. En el siguiente trapecio ABCD, indicar los nombres de los siguientes elementos:



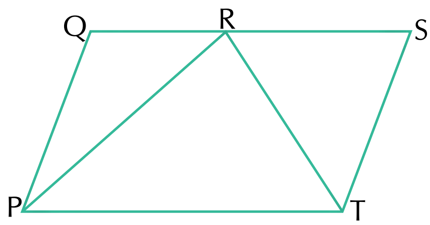
- $\overline{BC}$: ....
- $\overline{AD}$: ....
- $\overline{MN}$: ....
- $\overline{PQ}$: ....

Resolución de problemas

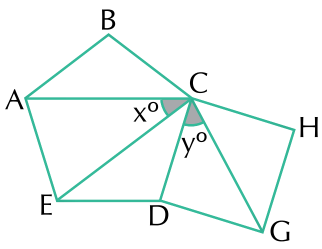
3. Del gráfico: AF = FE. Calcule "AB", si: CF = 18 u y DE = AB + 24 u.



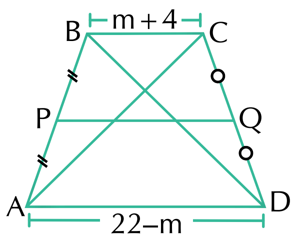
4. Si $\overline{PR}$ y $\overline{TR}$ son bisectrices y además: ST = 15u, calcule "PT". (PQST es un romboide.)



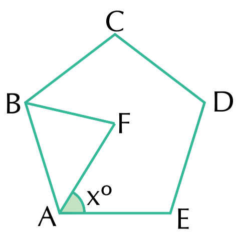
5. Calcule "xº + yº", si los polígonos ABCDE y CDGH son regulares.



6. En el trapecio ABCD, calcule "PQ".



7. Si ABCDE y ABF son polígonos regulares, calcule "xº".



8. En un trapecio, la base menor mide 10u y el segmento que une los puntos medios de las diagonales mide 4u. Calcule la medida de la base mayor.

9. Las bases de un trapecio se encuentran en la relación de 4 a 7. Si el segmento que une los puntos medios de las diagonales mide 6u, calcule la medida de la mediana del trapecio.

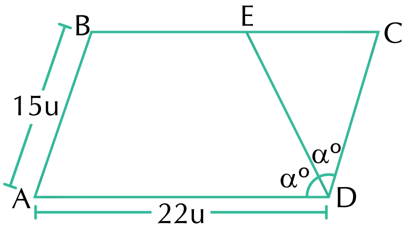
10. En un trapecio rectángulo, uno de sus ángulos interiores mide 136º. Calcule la medida del otro ángulo interior.

11. En un cuadrilátero ABCD, se cumple que: $m\sphericalangle A = \phi°$, $m\sphericalangle B = m\sphericalangle C = 2\phi°$ y $m\sphericalangle D = 3\phi°$. Calcule: $m\sphericalangle D$.

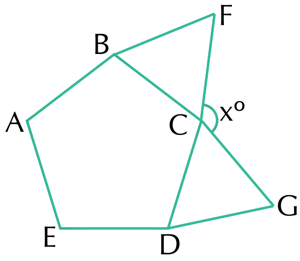
12. En un trapezoide ABCD, $m\sphericalangle A = 60°$; $AB = 8\sqrt{3}$; $CD = 20\sqrt{2}$ y $m\sphericalangle D = 45°$. Calcule la distancia del punto medio "L" de $\overline{BC}$ al lado $\overline{AD}$.

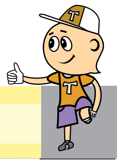
13. En el cuadrilátero ABCD, se cumple que: $m\measuredangle ABC=90°$, $m\measuredangle CBD=15°$, $m\measuredangle BDA=30°$ y $BC = CD$. Calcule la $m\measuredangle BAD$.

14. Calcule "BE", si ABCD es un romboide



15. Si los polígonos ABCDE, BFC y DGC son regulares, calcule "x°".





¡Tú puedes!

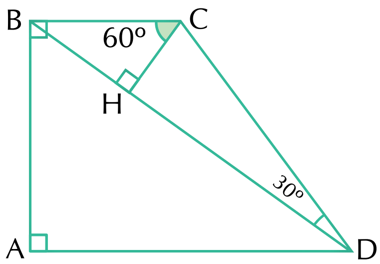
1. En un octógono equiángulo (convexo) ABCDEFGH, se sabe que: $AB = 3\sqrt{2}u$ y $BC = 1u$, calcule "AC".

2. En un hexágono equiángulo ABCDEF, se sabe que: $BC = 4u$; $AB = 3u$; $CD = 6u$ y $DE = 5u$. Calcule el perímetro del hexágono mencionado.

3. Se tiene un romboide ABCD, tal que: $m\measuredangle BCD = 80°$. Calcule: $m\measuredangle O_1DO_2$, tal que "O_1" y "O_2" son incentros de los triángulos ABD y BCD respectivamente.

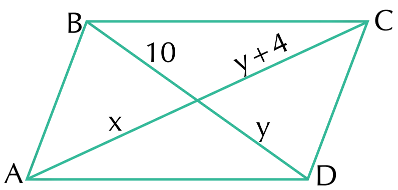
4. En el romboide ABCD: $m\measuredangle BDC=90°$ y "M" es el punto medio de $\overline{AD}$ tal que: $AD = 20u$. Por "A" y "B" se trazan paralelas a $\overline{BM}$ y $\overline{CM}$ respectivamente, las cuales se intersectan en "N". Calcule "AN".

5. En el gráfico: $CH = 4u$, calcule la longitud de la mediana del trapecio ABCD.

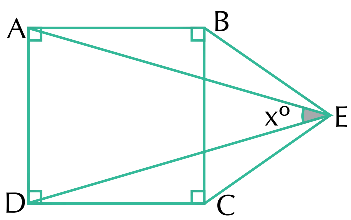


Practica en casa

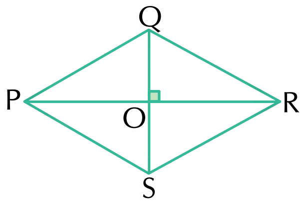
1. Si ABCD es un romboide, hallar "x/y"



2. Si los polígonos ABCD y BEC son regulares, calcule "x".



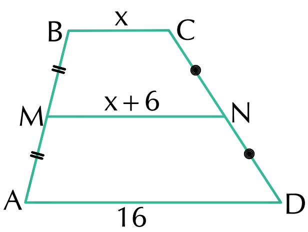
3. En la figura, PQRS es un rombo. Si: $PO=3(QO)$ y el perímetro del rombo es $20\sqrt{10}$, calcule "PO".



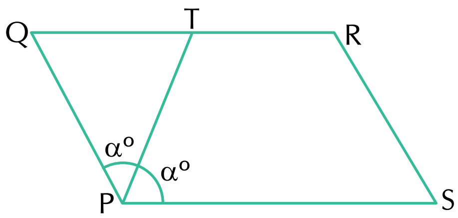
4. Calcule el ángulo interno de un polígono de 18 lados.

5. Calcule la suma del ángulo central y el ángulo interno de un polígono regular de 14 lados.

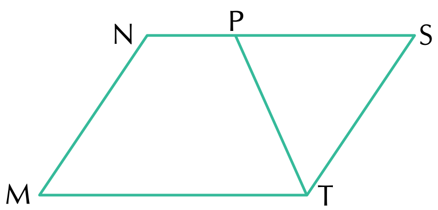
6. Si ABCD es un trapecio, calcule "x".



7. En la figura, PQRS es un romboide. Si: $TR=2RS$, calcule el valor del segmento que une los puntos medios de $\overline{PT}$ y $\overline{RS}$, siendo: $\alpha=60°$ y $PT=6u$.

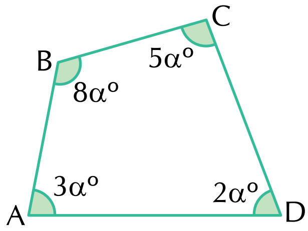


8. Si MNST es un romboide, $\overline{TP}$ es bisectriz y $ST=8u$, calcule el valor del segmento que une los puntos medios de $\overline{NT}$ y $\overline{MP}$.



9. En un rectángulo ABCD, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en "O". Si: $m\measuredangle AOB=60°$ y $CD=8$ u, calcule el perímetro del rectángulo.

10. Calcule "α", si ABCD es un trapezoide.

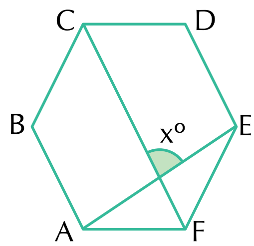


11. Se tiene un hexágono regular cuyo perímetro es de 48u. Calcule el área de la región hexagonal.

12. Calcule el área de la región de un cuadrado, si su diagonal mide $6\sqrt{2}$ cm.

13. Las diagonales de un trapezoide miden 16 y 18 cm y además forman un ángulo de 60°. Calcule el área de la región del trapezoide.
Nota: $\text{sen}60°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

14. Si ABCDEF es un hexágono regular, calcule "x".



15. Calcule el ángulo exterior de un polígono de 15 lados.

UNIDAD 5

LA CIRCUNFERENCIA Y SUS MÚLTIPLES USOS

La circunferencia en los deportes

Quizás parezca que en la única parte en donde podría aplicarse la circunferencia en los deportes, sería en los balones... Pero no, si solo nos detenemos a pensar un poco nos daremos cuenta que muchas de las canchas o lugares en donde se practican deportes, tienen marcas geométricas y circunferencias que determinan situaciones reglamentarias, etc. Los campos de fútbol, las canchas de básquetbol, los campos de fútbol americano y en muchas más.

- ¿Qué determinan las circunferencias?

APRENDIZAJES ESPERADOS

Comunicación matemática

- Define a la circunferencia y la diferencia del círculo.
- Identifica las líneas asociadas a la circunferencia.
- Identifica los ángulos asociados a la circunferencia.
- Enuncia los teoremas y propiedades de la proporcionalidad.

Resolución de problemas

- Analiza los datos disponibles y los relaciona con los teoremas y propiedades.
- Formula estrategias de resolución en diferentes tipos de problemas.

Circunferencia

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar las líneas asociadas a la circunferencia.
- A reconocer y aplicar los teoremas de Poncelet y Pitot.

La circunferencia en la música

Se utilizan técnicas circunferenciales para muchas cosas. Por ejemplo, los Cds, piezas ordinarias en la música actual, son una placa circular con un borde que termina siendo una circunferencia. Al centro se observa un orificio redondo que sirve para tomar el Cd y para que la radio lo reproduzca. Estas piezas de la electrónica requieren de mucha precisión para su correcto funcionamiento. Por lo tanto para su fabricación se usan las técnicas del radio y el diámetro.

http://www.taringa.net

Otro ejemplo en la música serían también las baterías musicales. La batería, junto con la guitarra y el bajo son los instrumentos más utilizados dentro de la música popular, que es la música más escuchada mundialmente, por eso su nombre. Este instrumento esta conformado básica y principalmente por los 5 "tambores" básicos y los platillos. Los tambores (caja, bombo, toms, timbales) son de forma tubular y con un cierto largo. (No esta demás decir que los aros que se usan para tensar y afinar la zona donde se golpean los tambores son "circunferencias" y su diámetro es un poco mayor que el del tambor). Cuando alguien se refiere a algún tipo de tambor habla por ejemplo de "un bombo de 46 x 35", esto significa que es un bombo que tiene 46cm de diámetro y 35cm de fondo. Con los platillos también se usa la circunferencia. Los platillos son placas metálicas, redondas y semi - planas que producen sonidos al ser golpeadas. También tienen sus medidas, y para hablar de estas, se recurre al diámetro. Por ejemplo: "Ese platillo es de 18", esto significa que el platillo tiene 18 pulgadas de diámetro.

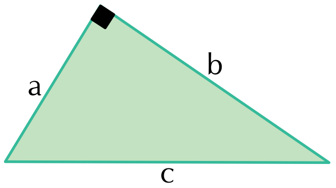
La circunferencia en las armas

Como ya hemos dicho, el diámetro es un segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro, este diámetro es lo que se usa para medir el tamaño de agujeros como lo es en las armas. Se habla normalmente de pistolas calibre 6.35 mm, 7.65 mm, 9 mm, etc. Esto no es solo un "nombre", sino que esto se refiere al tamaño del agujero (cañón) por donde salen los proyectiles (balas) del arma, usando el tamaño del diámetro y usando una medida milimetrada para lograrlo.

Teniendo en cuenta que las armas son utilizadas muchas veces con motivos militares, es importante que las armas sean testeadas a la perfección respecto a sus diámetros, ya que el menor desperfecto puede ocasionar anomalías muy peligrosas, que terminan siendo el motivo de la vida o muerte de muchas personas. Donde la vida corre peligro es donde es más importante un buen control de calidad de los productos.

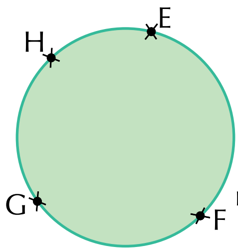
Saberes previos

- Teorema de Pitágoras



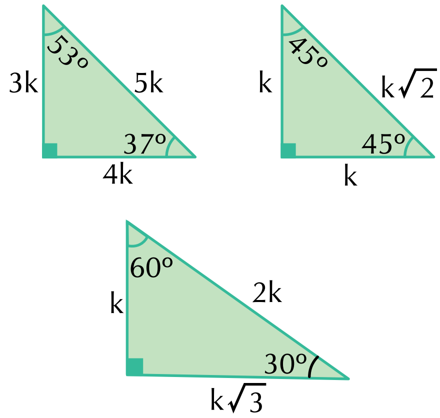
$$a^2+b^2=c^2$$

- Todos los arcos sobre una circunferencia suman 360º



$$m\overset{\frown}{EF}+m\overset{\frown}{FG}+m\overset{\frown}{GH}+m\overset{\frown}{HE}=360^\circ$$

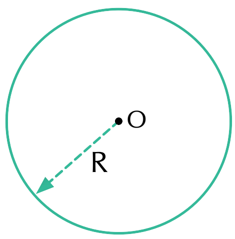
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º
- Triángulos notables:



Conceptos básicos

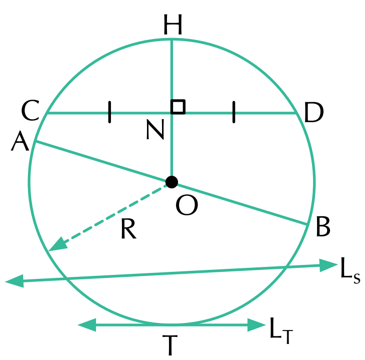
Definición

Es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto de dicho plano denominado centro. A la distancia constante de estos puntos al centro se le denomina radio de la circunferencia.



O: centro
R: radio

Líneas asociadas a la circunferencia



"O": centro

"R": radio

$\overline{AB}$: diámetro

$\overline{CD}$: cuerda CD

$\overset{\frown}{CD}$: arco CD

$\overline{NH}$: flecha

$\overleftrightarrow{L_S}$: recta secante

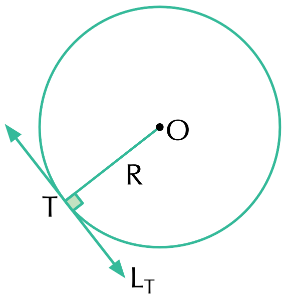
$\overleftrightarrow{L_T}$: recta tangente

"T": punto de tangencia

Longitud de la circunferencia: $Lc=2\pi R$

Propiedades fundamentales en toda circunferencia

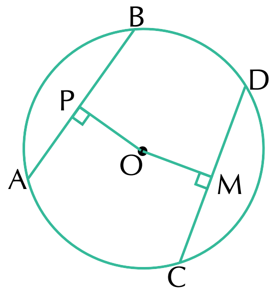
1.



"O": Centro
"T": Punto de tangencia

$\overline{OT} \perp \overleftrightarrow{L_T}$

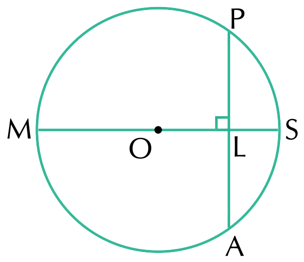
2.



"O": Centro

Si: $AB = CD$
$\rightarrow OP = OM$

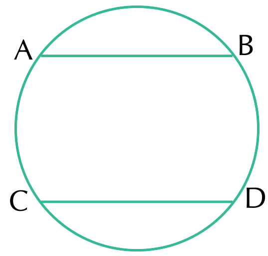
3.



"O": Centro

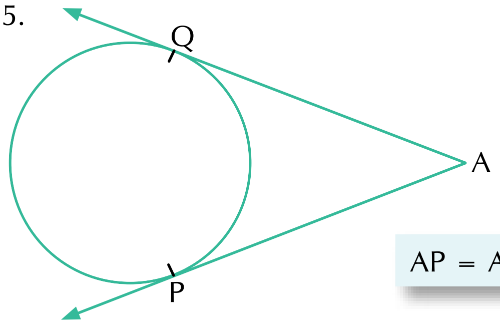
$PL = LA$
$m\widehat{PS} = m\widehat{SA}$
$m\widehat{PM} = m\widehat{MA}$

4.



Si: $\underline{AB} \,//\, \underline{CD}$
$\rightarrow m\widehat{AC} = m\widehat{BD}$

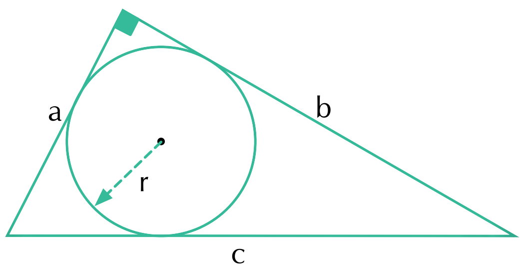
5.



"Q" y "P": puntos de tangencia

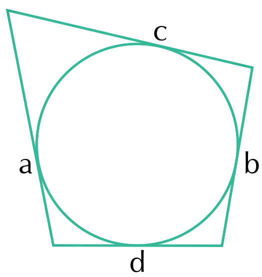
$AP = AQ$

Teorema de Poncelet



$a + b = c + 2r$

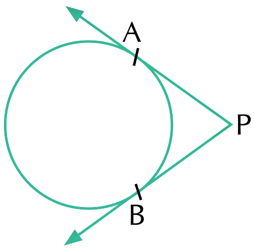
Teorema de Pitot



$a + b = c + d$

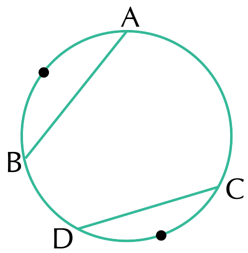
Aplica lo comprendido

1. Del gráfico, calcule "AP", si "A" y "B" son puntos de tangencia. ($AP = 3x + 7$ y $BP = 2x + 16$)

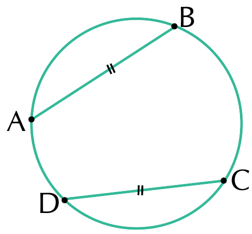


2. Del gráfico, calcule "x" en cada caso.

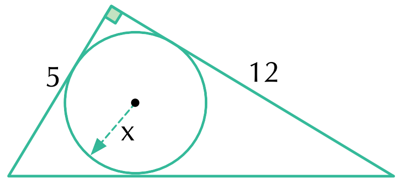
- Si: $m\overset{\frown}{AB} = 42°$ y $m\overset{\frown}{CD} = 5x^2 - 3°$.



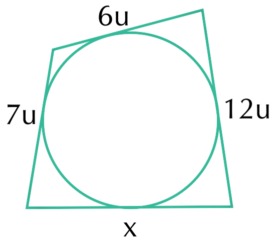
- Si: $m\overset{\frown}{AB} = 4x - 9°$ y $m\overset{\frown}{CD} = 39°$, AB = CD



3. Del gráfico, calcule "x".



4. Del gráfico, calcule "x"



5. Si el radio de una circunferencia es de 4u, calcule el área de su región circular.

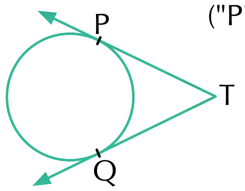
6. Si el área de un círculo es de $289\pi\ u^2$, calcule la longitud de su diámetro.

Aprende más...

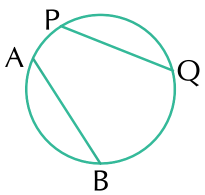
Comunicación matemática

1. Indicar la relación que se cumple en cada caso:

("P" y "Q" puntos de tangencia)

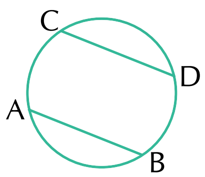


$\Rightarrow$ PT = ...



Si: PQ = AB

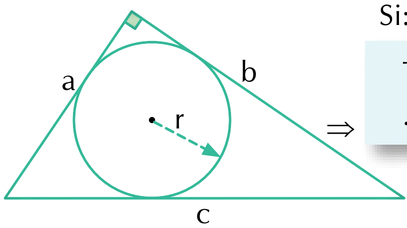
$\Rightarrow$ $m\overset{\frown}{PQ} =$ ....



Si: $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

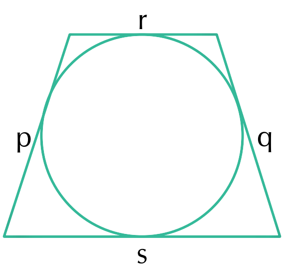
$\Rightarrow$ $m\overset{\frown}{AC} =$ ....

2. Indicar el teorema que se cumple en cada caso:



Si: $a + b = c + 2r$

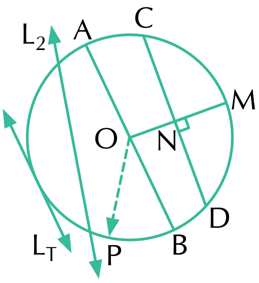
$\Rightarrow$ Teorema de ....



Si: $p + q = r + s$

$\Rightarrow$ Teorema de ....

3. Indicar los nombres de cada elemento de la circunferencia.



$\overline{AB}$: ....

$\overline{OP}$: ....

$\overset{\frown}{CD}$: ....

$\overline{CD}$: ....

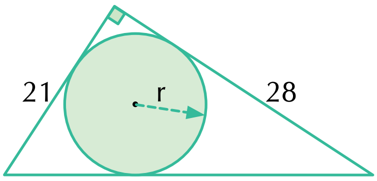
$\overline{MN}$: ....

$\overleftrightarrow{L_T}$: ....

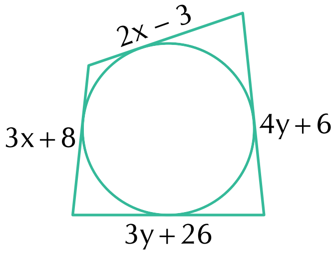
$\overleftrightarrow{L_2}$: ....

Resolución de problemas

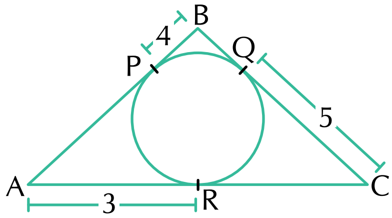
4. Del gráfico, calcule "r".



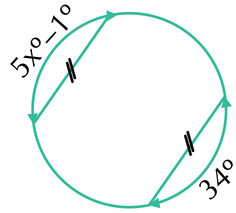
5. Del gráfico, calcule "x+y".



6. En el siguiente gráfico, calcule el perímetro del triángulo ABC. ("P"; "Q" y "R" son puntos de tangencia.)



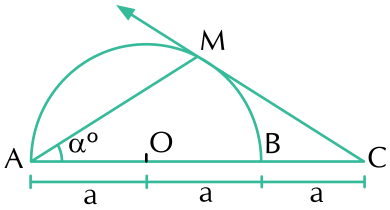
7. Del gráfico, calcule "x".



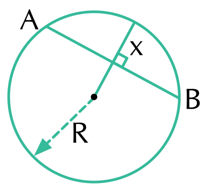
8. Si la longitud de una circunferencia es de 128π, calcule su radio.

9. Si el área de una región circular es de 121π u^2, calcule la longitud de su circunferencia.

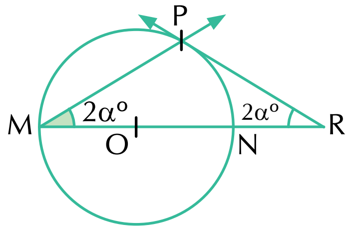
10. Del gráfico, calcule "α" ("M" es punto de tangencia y "O" es centro.)



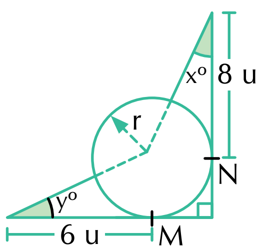
11. Del gráfico, calcule "x", si: AB = 24 cm y R = 13 cm.



12. Del gráfico, calcule "α" ("P" es punto de tangencia y "O" es centro.)

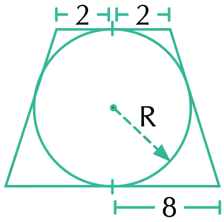


13. Si: r = 6 u, calcule "x + y". ("M" y "N": puntos de tangencia)

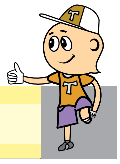


Aplicación cotidiana

14. Se requiere colocar una tubería en un túnel trapezoidal isósceles, como se muestra en la figura. Calcule el radio "R", si:



15. El área de un parque que tiene forma circular es de 121π u^2. Calcule la longitud del cerco que se debe colocar alrededor de dicho parque, si hay que darle 3 vueltas.



¡Tú puedes!

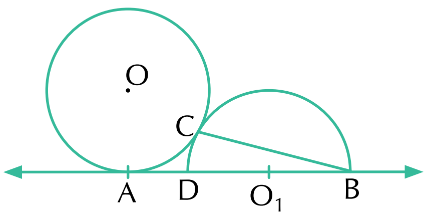
1. En un triángulo rectángulo, las longitudes de la hipotenusa y el inradio suman 21u. Calcule el semiperímetro del triángulo rectángulo.

2. Calcule la longitud del radio de la circunferencia inscrita a un triángulo rectángulo, si la diferencia entre el semiperímetro y la longitud de la hipotenusa es 4u.

3. Se tiene un trapecio isósceles circunscrito a una circunferencia. Si un lado no paralelo mide 13u, calcule la longitud de la mediana del trapecio.

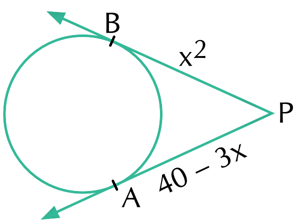
4. Un trapecio rectángulo está circunscrito a una circunferencia. Si el radio de la circunferencia mide 2u y uno de los lados no paralelos mide 5u, calcule la longitud de la base menor.

5. En el gráfico, "A" y "C" son puntos de tangencia en las circunferencias de igual radio. Calcule: m∢CBA. ("O" y "O_1" son centros).

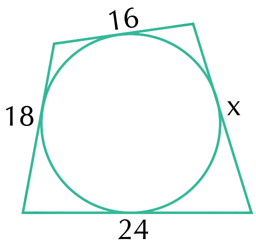


Practica en casa

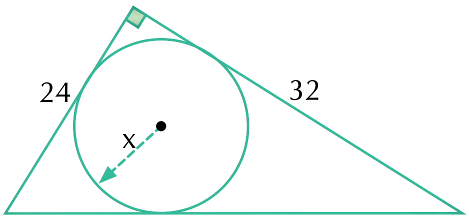
1. En el gráfico, calcule "x", si "B" y "A" son puntos de tangencia.



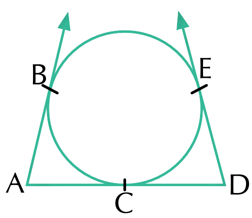
2. Del gráfico, calcule "x".



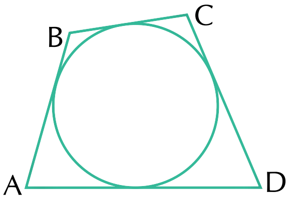
3. Del gráfico, calcule "x".



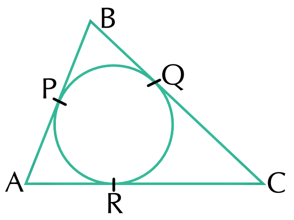
4. En el gráfico, si: AB + ED = 24 u, calcule "AD" ("B"; "E" y "C" son puntos de tangencia)



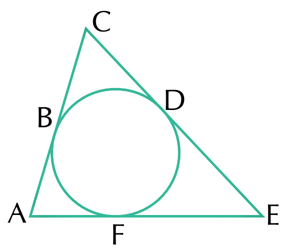
5. En el gráfico, si: AB + BC + CD + AD = 48 u, calcule el valor de "AB + CD"



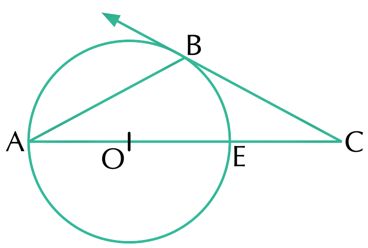
6. En el gráfico: AB = 15 cm; BC = 16 cm y CA = 17 cm. Calcule "PA", si "P"; "Q" y "R" son puntos de tangencia.



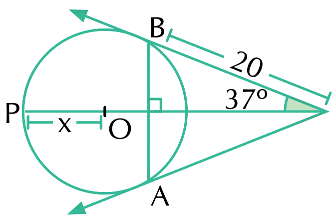
7. Si: AB + CD + EF = 32 cm, calcule el perímetro del triángulo ACE. ("B"; "D" y "F" son puntos de tangencia)



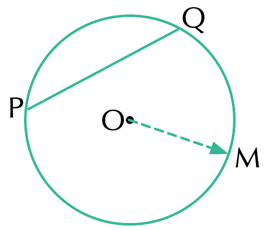
8. En el gráfico, calcule "ϕ", si: m∢ABO = m∢BCA = 3ϕ°. ("B": punto de tangencia y "O" es centro)



9. En el gráfico, calcule "x" ("B" y "A" son puntos de tangencia y "O" es centro.)



10. Del gráfico: PQ = 48 u y OM = 26 u. Calcule la flecha correspondiente a $\overline{PQ}$.

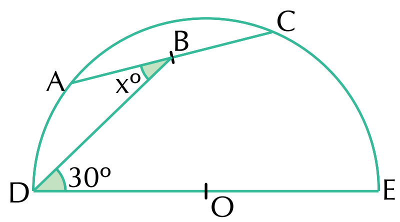


11. Si la longitud de una circunferencia es de 18π, calcule el diámetro de dicha circunferencia.

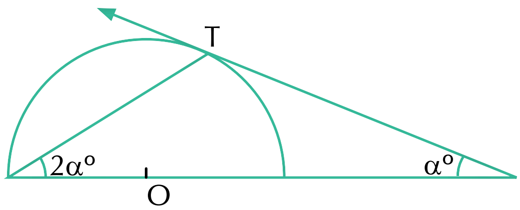
12. Si el área de la región de un cuadrado es de 169 u^2, calcule la longitud de la circunferencia inscrita.

13. ¿Cuál será la longitud de una circunferencia, la cual tiene el doble de área de otra circunferencia de 4m de radio?

14. Calcule "x", si $\overline{OC}$ es radio y además: AB = BC y DE = 2DB.



15. Del gráfico, "O" es centro y "T" es punto de tangencia. Calcule "α".



Ángulos asociados a la circunferencia

En este capítulo aprenderemos:

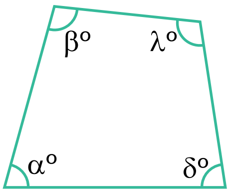
- A identificar los ángulos que se determinan según la posición de sus vértices y lados.
- A reconocer y aplicar las propiedades de sus ángulos y del área de la región circular.

Muchas veces los estudiantes han pensado (o piensan) que la geometría no sirve para nada (especialmente los que quieren seguir carreras que no usan matemáticas). Pero la geometría sirve mucho a diario. ¿Uno vive en la tierra o no? Claro, ahora: Geometría viene de Geo = tierra y Metría = medición, medición de la tierra, la tierra en que vivimos... No creo que alguien pueda vivir sin saber nada del mundo donde vive ¿o sí?. Por lo menos algún par de cosas físicas para entenderlo mejor.
Así que este trabajo se centra principalmente en la importancia de la geometría relacionada con la famosa circunferencia. Quizás para muchos esta es solo una "línea circular con un centro O"... Pero en realidad es mucho más que eso y con este trabajo he tratado de mostrar variados usos de este elemento geométrico para que la gente lo entienda mejor y no crea que lo estudia solo porque así es el sistema de enseñanza.
La circunferencia es uno de los elementos de la geometría más importantes que están anormalmente en la vida, aunque no lo parezca. Está en todas partes.
En la prehistoria (millones de años atrás), con la invención de la rueda se dio inicio a toda la tecnología de hoy en día, todo gracias a la rueda aunque sea indirectamente, y nuevamente tenemos aplicaciones de la circunferencia en esta.
Para partir con este amplio e importante tema, primero aclararemos que es la circunferencia:
La circunferencia es la línea "imaginaria" que rodea un círculo, todos los puntos de la línea están a la misma distancia del centro. Es la línea negra en el dibujo (la parte color plomo se llama círculo).
Para lograr una perfecta precisión, se han fijado puntos claves en la circunferencia, como lo es el punto "O" ("O" centro) y con eso, el llamado diámetro y el radio.
El diámetro es un segmento que une dos puntos de la circunferencia, pasando por el centro. Y el radio es un segmento que une un solo punto de la circunferencia con el punto "O", por lo tanto un diámetro es igual a dos radios.
Hay que aclarar que se pueden hacer infinitos radios, como también infinitos diámetros. (Quizás en el dibujo no quedó claro esto).

- ¿Qué tanta importancia tiene la circunferencia en nuestra vida?

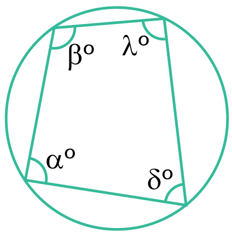
Saberes previos

- En todo cuadrilátero, la suma de los ángulos internos es de 360º.



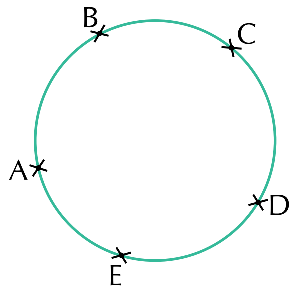
$$\alpha^{o}+\beta^{o}+\lambda^{o}+\delta^{o}=360^{o}$$

- En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos suman 180º.



$$\alpha^{o}+\lambda^{o}=180^{o}$$
$$\beta^{o}+\delta^{o}=180^{o}$$

- Todos los arcos alrededor de una circunferencia suman 360º.



$$m\overset{\frown}{AB}+m\overset{\frown}{BC}+m\overset{\frown}{CD}+m\overset{\frown}{DE}+m\overset{\frown}{EA}=360^{o}$$

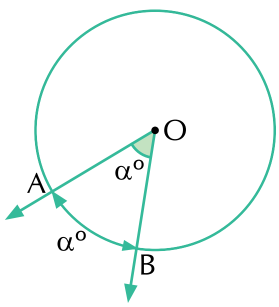
Conceptos básicos

Ángulos asociados a la circunferencia

Los diferentes tipos de ángulos en la circunferencia vienen determinados por la disposición de sus vértices y lados. A cada ángulo se le asocia los arcos que abarca.

Tipos de ángulos en la circunferencia.

Ángulo central: Es el ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia.

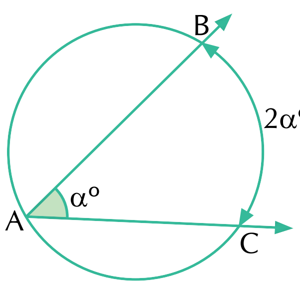


O: Centro de la circunferencia

$m\sphericalangle AOB=\alpha^{o}$

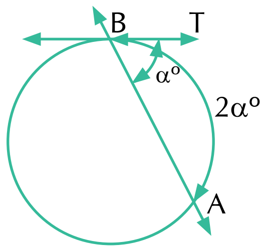
$m\sphericalangle AOB=m(\overset{\frown}{AB}) \Rightarrow \boxed{\alpha^{o}=m\overset{\frown}{AB}}$

Ángulo inscrito: Es el que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son dos secantes.



Si: $m\sphericalangle BAC=\alpha^{o} \rightarrow m\overset{\frown}{BC}=2\alpha^{o}$

Ángulo seminscrito: Es el que tiene su vértice en la circunferencia y uno de sus lados es tangente y el otro secante.



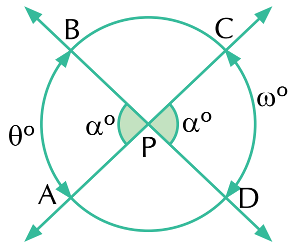
"B": Punto de tangencia

$\overleftrightarrow{BT}$: Recta tangente

$\overleftrightarrow{BA}$: Recta secante

$$\text{Si: } m\measuredangle TBA = \alpha° \Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = 2\alpha°$$

Ángulo interior: Es el ángulo que tiene su vértice en un punto interior a la circunferencia.

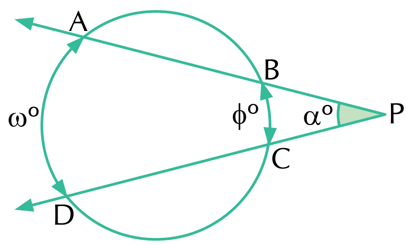


$$m\measuredangle BPA = m\measuredangle CPD = \alpha°$$

$$\alpha° = \frac{\theta° + \omega°}{2}$$

Ángulo exterior

Ángulo formado por dos rectas secantes.



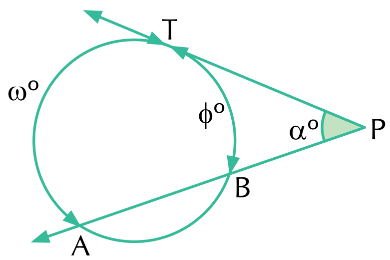
$m\measuredangle APD = \alpha°$

$m\overset{\frown}{BC} = \phi°$

$m\overset{\frown}{AD} = \omega°$

$$\alpha° = \frac{\omega° - \phi°}{2}$$

Ángulo formado por una recta secante y una recta tangente.



"T": Punto de tangencia

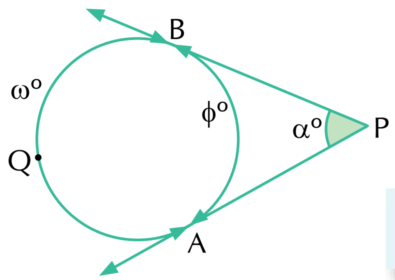
$m\measuredangle TPA = \alpha°$

$m\overset{\frown}{TB} = \phi°$

$m\overset{\frown}{TA} = \omega°$

$$\alpha° = \frac{\omega° - \phi°}{2}$$

Ángulo formado por dos rectas tangentes.



$m\measuredangle BPA = \alpha°$

$m\overset{\frown}{BA} = \phi°$

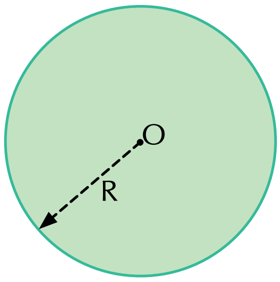
$m\overset{\frown}{BQA} = \omega°$

$$\alpha° = \frac{\omega° - \phi°}{2}$$

Nota: $\alpha° + \phi° = 180°$

Área de la región circular

El área de la región circular es igual al valor de su radio elevado al cuadrado y multiplicado por pi (π = 3,14159...)



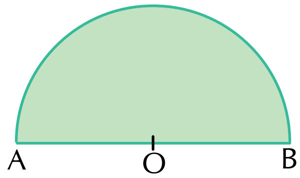
$\text{Área} = \pi R^2$

Si: $2R = D$

$R = D/2$

También:

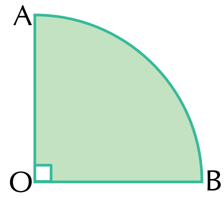
$\text{Área} = \dfrac{\pi D^2}{4}$



"O": Centro

$OA = OB = R$

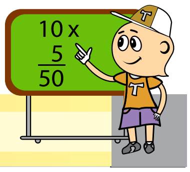
$\text{Área} = \dfrac{\pi R^2}{2}$



"O": Centro

$AO = OB = R$

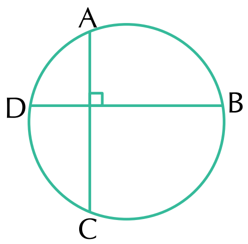
$\text{Área} = \dfrac{\pi R^2}{4}$



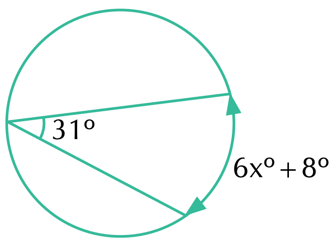
Aplica lo comprendido

1\.

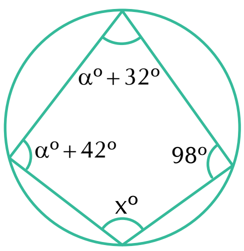
- Si en el gráfico: $m\overset{\frown}{AD} = 42°$, $m\overset{\frown}{BC} = x$, calcule "x".



- En el gráfico, calcule "x".

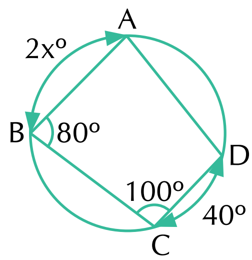


2\. En el gráfico, calcule "x"

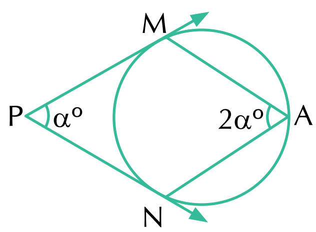


3\. Calcule el área de una región circular, cuyo radio mide 6u.

4\. Del gráfico, calcule "x"



5\. Del gráfico, calcule "α", si "M" y "N" son puntos de tangencia.

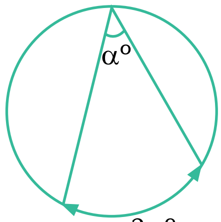


6\. Si el área de una región circular es de 196π u^2, calcule la longitud de su diámetro.

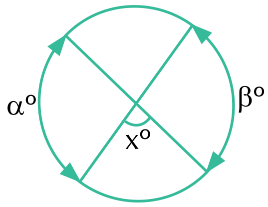
Aprende más...

Comunicación matemática

1. Indicar si es verdadero (V) o falso (F)



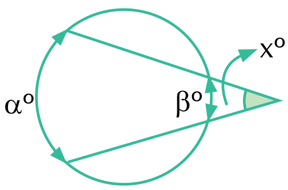
....

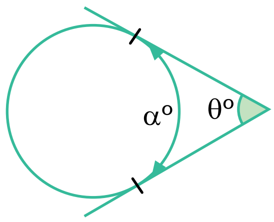


$x^o = \dfrac{\alpha^o + \beta^o}{2}$

....

2. Escribir la ecuación que se relaciona con cada gráfico:

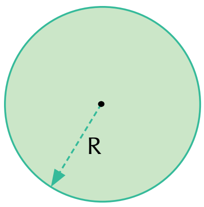


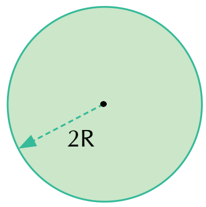


$x^o = \dfrac{-}{}$

$\alpha^o +$ .... = ...

3. Indicar en cada gráfico, si la expresión es verdadera (V) o falsa (F).

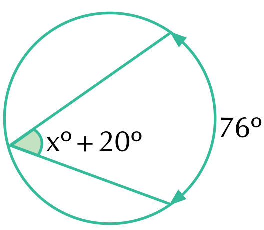




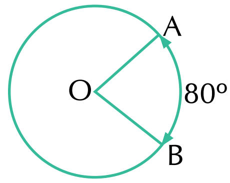
Área $= 2\pi R$ ....(   )   Área $= \pi R^2$ ....(   )

Resolución de problemas

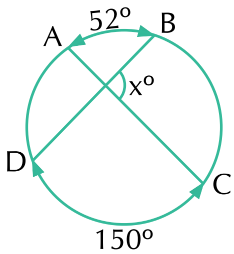
4. Del gráfico, calcule "x".



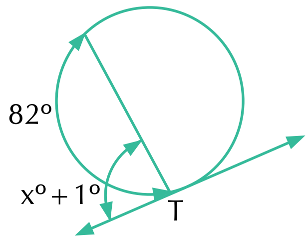
5. Del gráfico, calcule "x", si "O" es centro de la circunferencia. ($m\sphericalangle AOB = x + 30^o$)



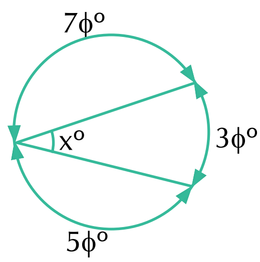
6. Del gráfico, calcule "x".



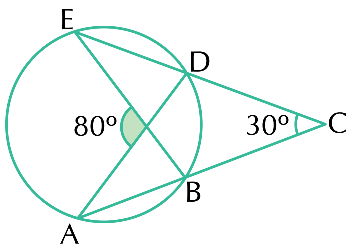
7. Del gráfico, calcular el valor de "x + 5°". ("T" es punto de tangencia).



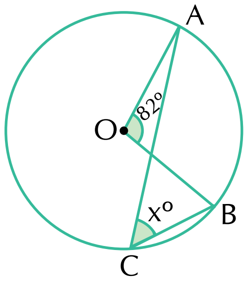
8. Del gráfico, calcule "x°".



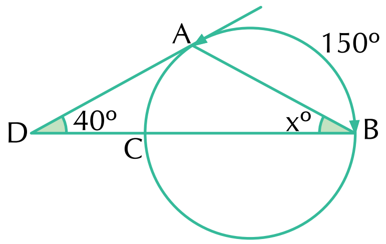
9. Del gráfico, calcule la medida del arco AE.



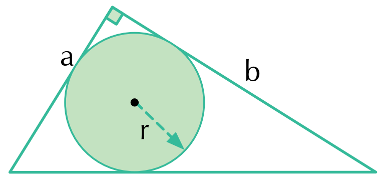
10. Del gráfico, calcule "x", si "O" es centro de la circunferencia.



11. Del gráfico, calcule "x", si "A" es punto de tangencia.



12. Del gráfico, calcule el área de la región circular, si: a = 8 u y b = 15 u.

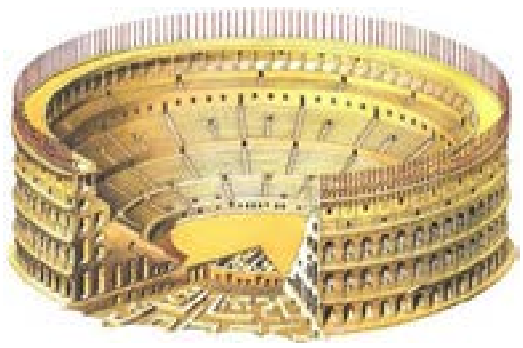


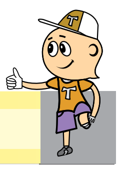
13. Calcule el área de una región circular, cuyo radio sea el doble del radio de la región circular "A_1" ($A_1 = 121\pi u^2$)

Aplicación cotidiana

14. Se quiere sembrar un parque de forma circular. ¿Cuántos metros cuadrados de césped se necesitarán, si la longitud de su circunferencia es de 628m? Nota: $\pi = 3,14$

15. Se quiere techar un coliseo cuyo techo es de forma circular. Si el radio de dicho techo es de 16m, calcular el área que se desea techar. ($\pi = 3,14$).

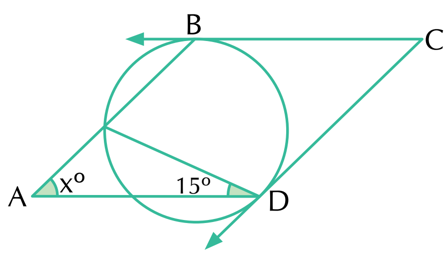




¡Tú puedes!

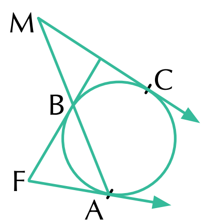
1. Se tiene un trapecio ABCD inscrito en una circunferencia, tal que: $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$. Calcule m∢BDA, si: $m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{AD} = 100°$

2. Siendo ABCD un romboide, calcule "x°". ("B" y "D" son puntos de tangencia).

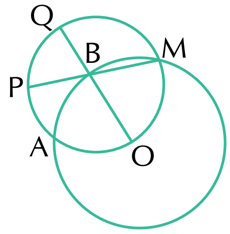


3. Desde un punto "P" exterior a una circunferencia se traza la tangente $\overline{PC}$ y la secante PAB y en la prolongación de $\overline{CA}$ se ubica el punto "D". Si: m∢CPA + m∢CBA = 80°, calcule: m∢BAD.

4. En la figura "A", "B" y "C" son puntos de tangencia. Si: m∢AFB = 70° y m∢AMC = 35°, calcule: m∢ABC.

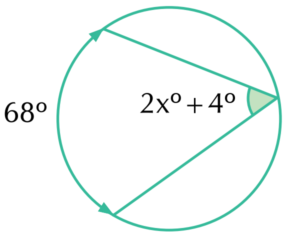


5. En la figura, si: $m\overset{\frown}{AB} = 50°$ y "O" es el centro, calcule: $m\overset{\frown}{AQ}$.

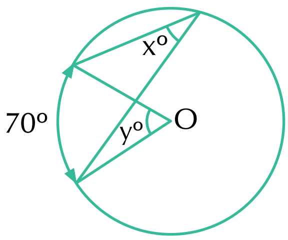


Practica en casa

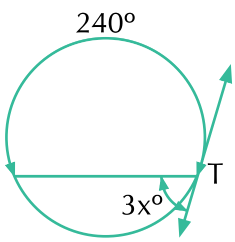
1. Del gráfico, calcule "x"



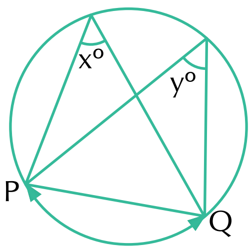
2. Si "O" es el centro, calcule "x + y".



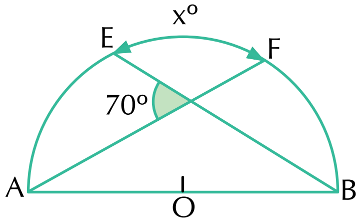
3. Del gráfico, calcule "x" ("T" es punto de tangencia).



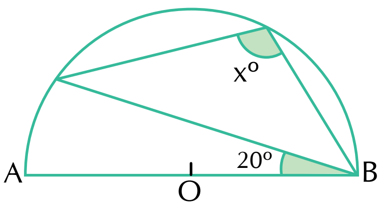
4. Del gráfico, calcule "x + y", si: $\overset{\frown}{PQ} = 100°$



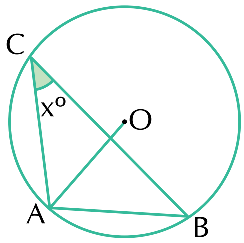
5. Del gráfico, calcule "x", si "O" es el centro de la semicircunferencia.



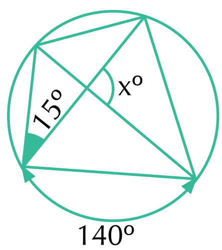
6. Del gráfico, calcule "x", si "O" es el centro de la semicircunferencia.



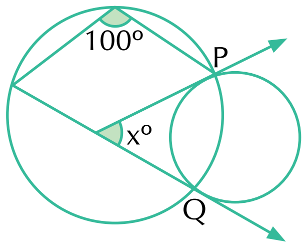
7. Si: OA = AB, calcule "x" del gráfico mostrado. ("O" es el centro de la circunferencia)



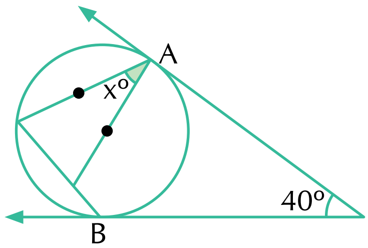
8. Del gráfico, calcule "x"



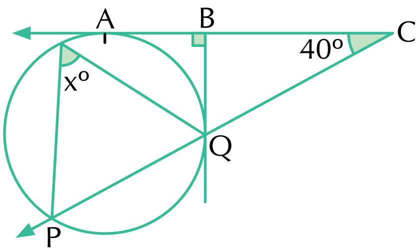
9. Siendo "P" y "Q" puntos de tangencia, calcule "x" del gráfico mostrado.



10. Siendo "A" y "B" puntos de tangencia, calcule "x" del gráfico mostrado.

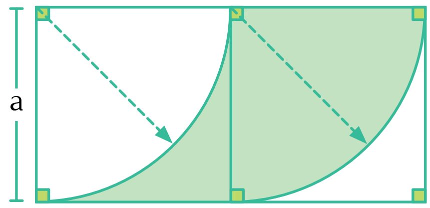


11. Siendo "A y "Q" puntos de tangencia, calcule "xº" del gráfico mostrado.

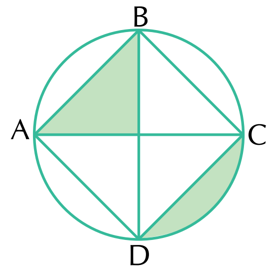


12. La longitud de una circunferencia es igual a 20π. Calcule el área del círculo correspondiente.

13. Del gráfico, calcule el área de la región sombreada.



14. Calcule el área de la región sombreada, si: $AB = 6\sqrt{2}$ (ABCD: cuadrado)



15. Si el área de una región circular es de $144\pi\ u^2$, calcule el área de otra región circular, cuyo radio sea los 4/3 de la región anterior.

Proporcionalidad

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar los tipos de proporcionalidad que se presentan.
- A reconocer y aplicar los teoremas en la resolución de problemas de proporcionalidad.

La proporcionalidad constituye un contenido unificador de nociones propias de la matemática y de otras ciencias, de los cuales algunos ejemplos son:

- las operaciones de multiplicación y división;
- las fracciones y los números racionales;
- los números decimales y la medida;
- los cambios de unidades, los cambios de escalas;
- los porcentajes;
- los problemas de reparto;
- la semejanza de figuras y cuerpos;
- las escalas, los mapas y las maquetas;
- la tasa de crecimiento de una función;
- la trigonometría de los triángulos rectángulos;
- los gráficos circulares;
- las tablas y reglas de cálculo;
- las definiciones de las unidades compuestas tales como la densidad, la presión, la velocidad y la aceleración;
- las equivalencias químicas;
- las leyes de los gases ideales;
- la tasa de natalidad y la densidad de la población; etc.

No todos estos temas poseen el mismo grado de dificultad. Dentro de los más sencillos está la noción de escala, que ve la utilidad del concepto de razón y comprende mejor el de constante de proporcionalidad, partiendo de aspectos perceptuales e intuitivos que ya manejan para alcanzar otros más formalizados.

En general, los problemas de proporcionalidad relacionan magnitudes distintas entre sí (costo - número de artículos; número de cajas iguales - peso del embarque, capacidad - volúmenes, etc), magnitudes que se miden con sistemas de unidades distintos, pero existen dos casos de uso común muy importantes, donde las magnitudes relacionadas son la misma, es decir se miden con el mismo sistema de unidades. En este caso el coeficiente de proporcionalidad al poder ser expresado con las mismas unidades no depende de esa unidad, es un número "sin dimensión".

- Si las magnitudes no son medibles, ¿se puede establecer una proporcionalidad?

Saberes previos

- Propiedad de las proporciones:

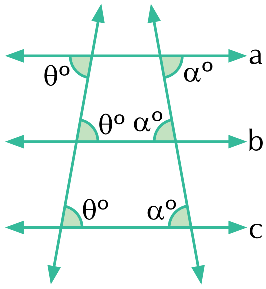
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a.d=b.c$$

- Propiedades de las proporciones continuas

$$\frac{a}{n}=\frac{b}{m}=\frac{c}{l}=\frac{d}{p}=...=k$$

$$a=nk;\ b=mk;\ c=lk;\ d=pk...$$

- Ángulos entre rectas paralelas

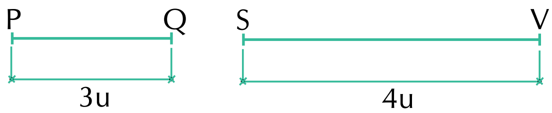


$\overleftrightarrow{a}\ //\ \overleftrightarrow{b}\ //\ \overleftrightarrow{c}$

Conceptos básicos

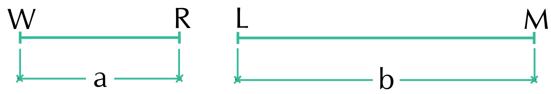
Razón geométrica de segmentos

Es la comparación mediante el cociente de las longitudes expresadas en la misma unidad de medida. El resultado de dicho cociente es la razón geométrica.



$$\Rightarrow \frac{PQ}{SV}=\frac{3u}{4u}\Rightarrow \boxed{\frac{PQ}{SV}=\frac{3}{4}}$$

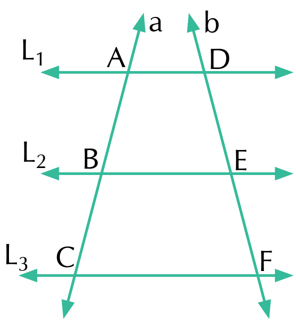
En forma genérica



$$\Rightarrow \boxed{\frac{WR}{LM}=\frac{a}{b}}$$

Teorema de thales

Si dos rectas cualesquiera, intersectan a dos o más rectas paralelas, entonces dichas rectas paralelas determinan sobre las dos rectas dadas, segmentos proporcionales respectivamente.



Si: $\overleftrightarrow{L_1}\ //\ \overleftrightarrow{L_2}\ //\ \overleftrightarrow{L_3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}}$

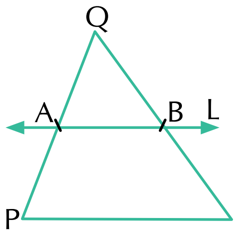
También:

$$\boxed{\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}}$$

$$\boxed{\frac{BC}{AC}=\frac{EF}{DF}}$$

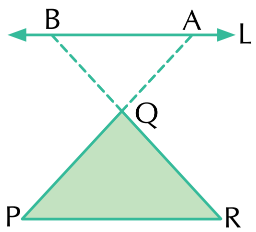
Corolario del teorema de Thales

Dado el triángulo PQR y la recta $\overleftrightarrow{L} \parallel \overline{PR}$, se cumple:



$$\frac{QA}{AP} = \frac{QB}{BR}$$

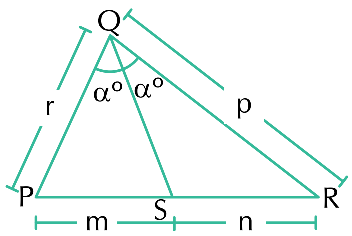
También:



$$\frac{BQ}{QR} = \frac{AQ}{QP}$$

Teorema de la bisectriz interior

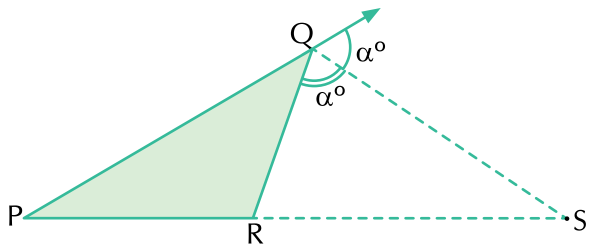
En todo triángulo al trazar la bisectriz interior relativa a un lado, sobre dicho lado se determina segmentos proporcionales a los otros dos.



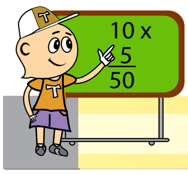
$$\frac{r}{p} = \frac{m}{n} \quad \text{ó} \quad \frac{r}{m} = \frac{p}{n}$$

Teorema de la bisectriz exterior

En todo triángulo al trazar la bisectriz exterior relativa a un lado, sobre la prolongación de dicho lado se determinan segmentos proporcionales a los otros dos lados.



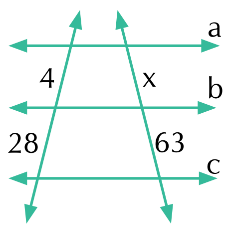
$$\frac{PQ}{QR} = \frac{PS}{RS} \quad \text{ó} \quad \frac{PQ}{PS} = \frac{QR}{RS}$$



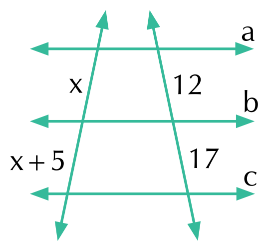
Aplica lo comprendido

1.

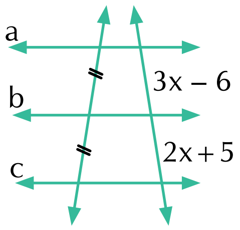
- Del gráfico, calcule "x", si: $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b} \parallel \overleftrightarrow{c}$



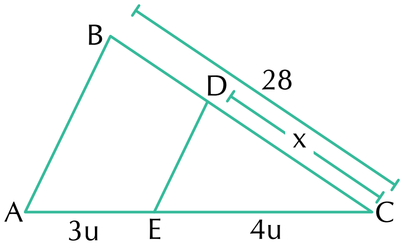
- Del gráfico, calcule "x", si: $\overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b} \parallel \overleftrightarrow{c}$



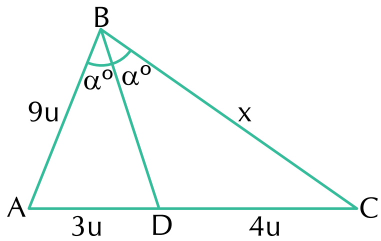
2. Del gráfico, calcule "x", si: $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b} // \overleftrightarrow{c}$



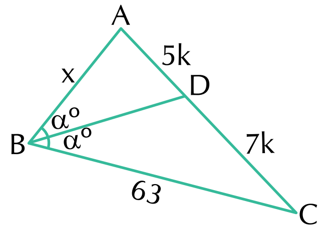
3. Del gráfico, calcule "x", si: $\overline{AB} // \overline{DE}$.



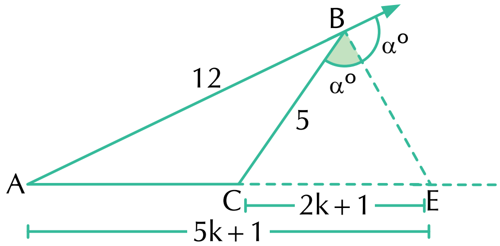
4. Del gráfico, calcule "x", si $\overline{BD}$ es bisectriz.



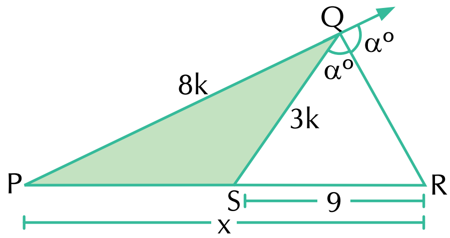
5. Del gráfico, calcule "x".

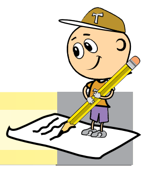


6.
- Del gráfico, calcule "k".



- Del gráfico, calcule "x".

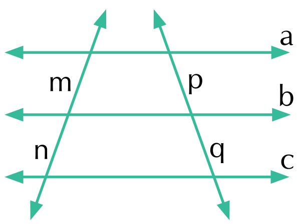




Aprende más...

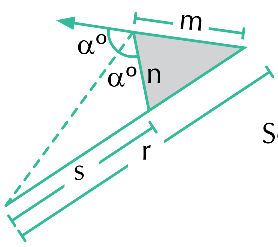
Comunicación matemática

1. Completar de acuerdo al gráfico, si: $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b} // \overleftrightarrow{c}$.



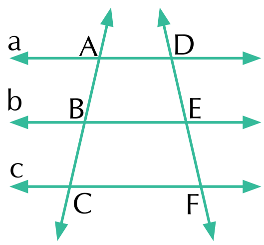
Se cumple: $\dfrac{m}{\quad} = \dfrac{\quad}{q}$

2. Completar de acuerdo al gráfico:



Se cumple: $\dfrac{m}{\quad} = \dfrac{\quad}{s}$

3. De acuerdo al gráfico, indicar cuál o cuáles de las relaciones son verdaderas ($\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b} // \overleftrightarrow{c}$)

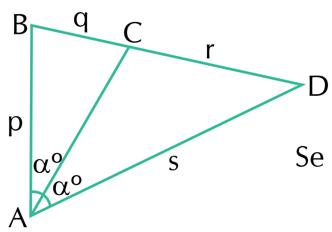


a) $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$ ....( )

b) $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DF}$ ....( )

c) $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{DF}{EF}$ ....( )

4. Completar de acuerdo al gráfico:

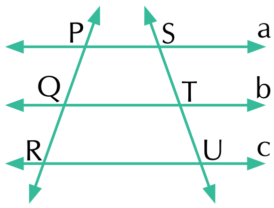


Se cumple: $\frac{p}{\_\_} = \frac{\_\_}{r}$

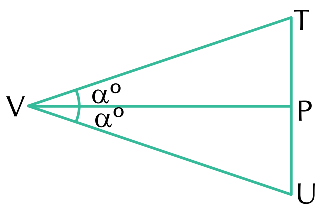
Resolución de problemas

5. En un triángulo PQR, se traza la bisectriz interior $\overline{RM}$. Si: $\frac{QR}{PR} = \frac{5}{9}$, calcule: $\frac{PM}{QM}$.

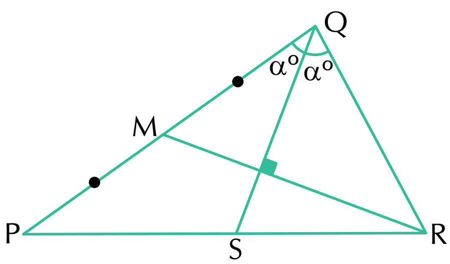
6. Del gráfico, calcule "PR", si: $\overleftrightarrow{a} \,//\, \overleftrightarrow{b} \,//\, \overleftrightarrow{c}$. Además: PQ = 4u; SU = 20u y TU = 4u



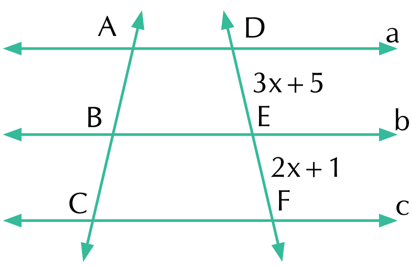
7. En el gráfico, calcule "PU", si: VT = 12 u; VU = 8 u y TU = 15 u.



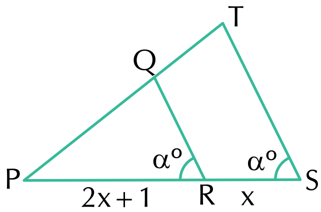
8. Del gráfico, calcule "PS", si: SR = 15 u.



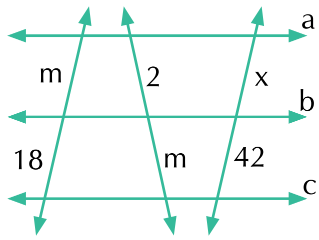
9. Si: $\overleftrightarrow{a} \,//\, \overleftrightarrow{b} \,//\, \overleftrightarrow{c}$ y además: AB = 12u y BC = 5u, calcule "x".



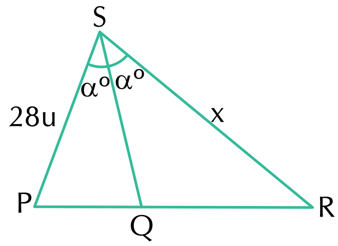
10. Del gráfico, calcule "x + 1", si: PT = 28 u y QT = 9u.



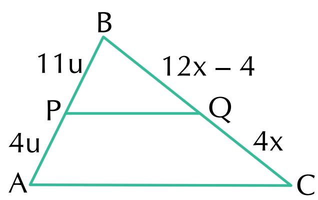
11. En el gráfico: $\overleftrightarrow{a} \,//\, \overleftrightarrow{b} \,//\, \overleftrightarrow{c}$, calcule "x"



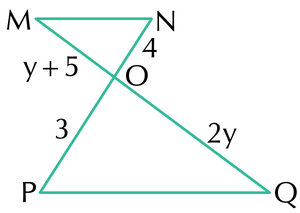
12. Del gráfico, calcule "x", si: $\frac{PQ}{QR} = \frac{7}{3}$



13. Del gráfico, calcule "x", si: $\overline{PQ} \,//\, \overline{AC}$.

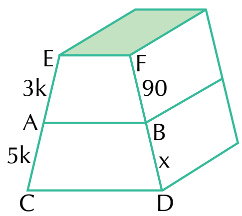


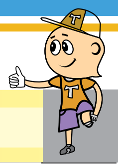
14. Del gráfico, calcule "y", si: $\overline{MN} \,//\, \overline{PQ}$.



Aplicación cotidiana

15. Se tiene un taburete de la siguiente forma. Calcule "x" para que $\overline{AB} \,//\, \overline{CD} \,//\, \overline{EF}$.





¡Tú puedes!

1. En un triángulo ABC, AB = 12u, BC = 18u y AC = 20u. Por un punto "P" de $\overline{AB}$ se traza una paralela $\overline{PQ}$ a $\overline{BC}$ ("Q" en $\overline{AC}$). Calcule "AQ", para que el perímetro del triángulo APQ sea igual al perímetro del trapecio QPBC.

2. En un triángulo ABC, la ceviana $\overline{AR}$ corta a la bisectriz interior $\overline{BD}$ en el punto "M". Si: BR = 2u; RC = 12u y BM = MD, calcule "AB".

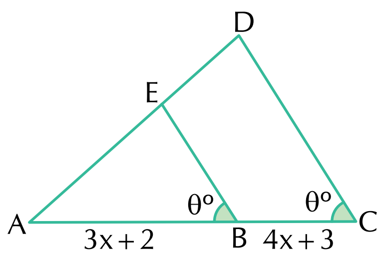
3. En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior $\overline{AR}$. Luego trazamos $\overline{ER}$ // $\overline{AC}$ y $\overline{EF}$ // $\overline{AR}$ ("E" ∈ $\overline{AB}$ y "F" ∈ $\overline{BC}$). Calcule "RC", si: BF = 5u y FR = 3u

4. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ y la bisectriz interior $\overline{DE}$ del ángulo BDC. Además $\overline{AE}$ intersecta a $\overline{BD}$ en el punto "M". Calcule "DM", si: AB = 16u; BE = 4u y AD = 6u.

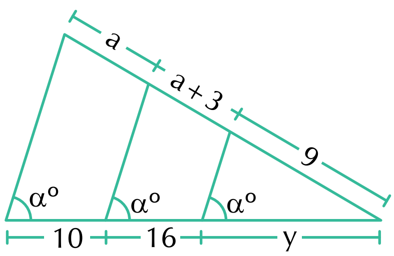
5. En un triángulo rectángulo ABC (recto en "C"), se traza la mediana $\overline{BM}$ y la bisectriz interior $\overline{CN}$. Calcule m∢BMC, si: 2(AN) = 3(BN).

Practica en casa

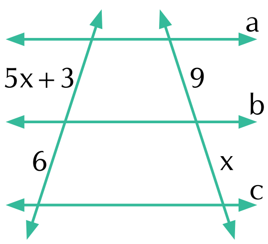
1. Del gráfico, calcule "x", si: AD = 33u y AE = 14u.



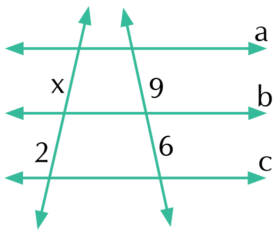
2. Del gráfico, calcule "y"



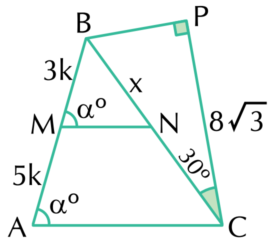
3. Si: $\overleftrightarrow{a}$ // $\overleftrightarrow{b}$ // $\overleftrightarrow{c}$, calcule "x" del gráfico mostrado.



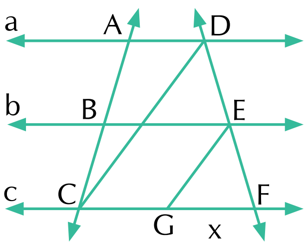
4. Si: $\overleftrightarrow{a}$ // $\overleftrightarrow{b}$ // $\overleftrightarrow{c}$, calcule "x" del gráfico mostrado.



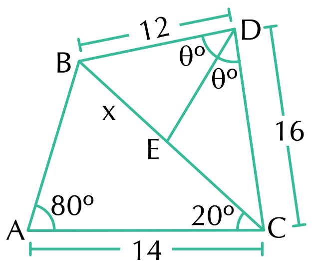
5. Hallar "x" del gráfico mostrado.



6. Si: $\overleftrightarrow{a}$ // $\overleftrightarrow{b}$ // $\overleftrightarrow{c}$ y $\overline{DC}$ // $\overline{EG}$, calcule "x" del gráfico mostrado. Además: AB = 7u; BC = 9u y CF = 8u.

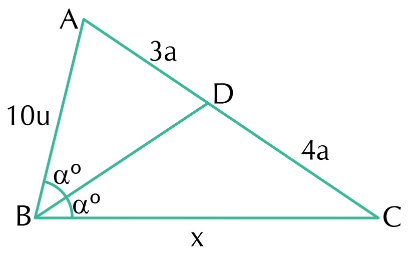


7. Calcule "x" del gráfico mostrado.

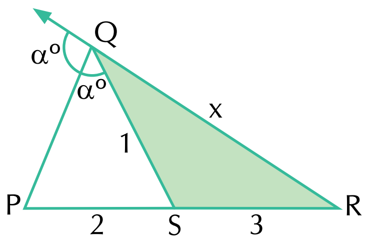


8. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{AP}$ y la mediana $\overline{BM}$ tal que sean perpendiculares entre sí. Calcule "BP", si: BC = 15.

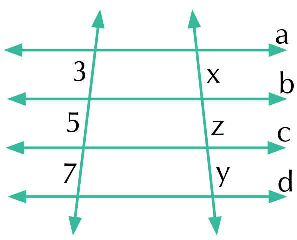
9. Calcule "x" del gráfico mostrado.



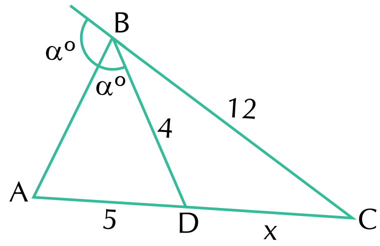
10. Calcule "x" del gráfico mostrado.



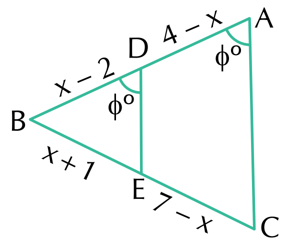
11. Si: $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b} // \overleftrightarrow{c} // \overleftrightarrow{d}$, calcule "y – x", si además: z = 15.



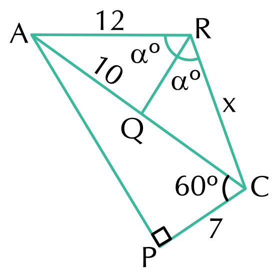
12. Calcule "x" del gráfico mostrado.



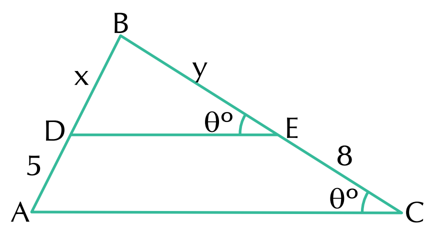
13. Calcule "x" en el gráfico mostrado.



14. Calcule "x" del gráfico mostrado.



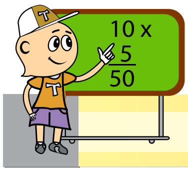
15. Si: y – x = 6, calcule "x + y"



Repaso

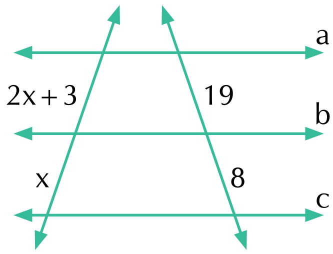
En este capítulo aprenderemos:

- A resolver cualquier tipo de ejercicios utilizando lo visto anteriormente.
- A reconocer los diferentes tipos de problemas.

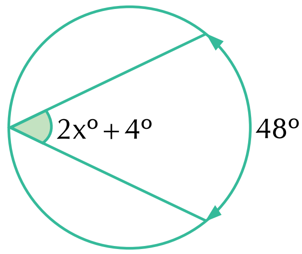


Aplica lo comprendido

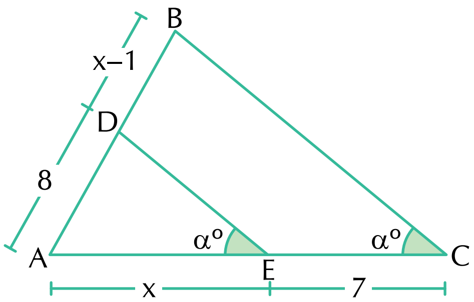
1. Del gráfico: $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b} // \overleftrightarrow{c}$. Calcule "x – 2"



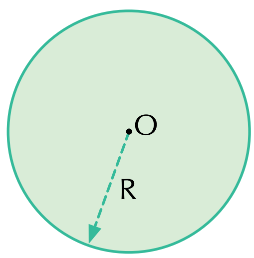
2. Calcule "x" del gráfico mostrado.



3. Hallar "x" del gráfico mostrado.

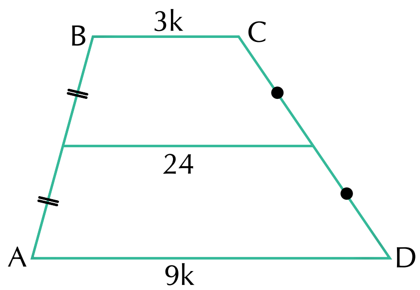


4. Calcule el área de la región circular, si: R = 4u.

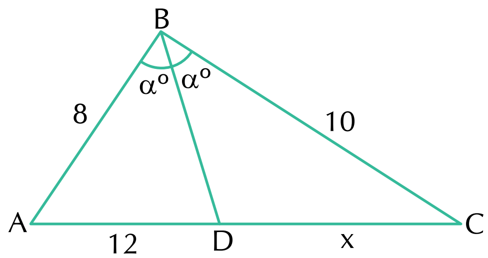


5. El área de la región de un cuadrado es de $256u^2$. Calcular el perímetro de su región.

6. Calcule "k", si el cuadrilátero ABCD es un trapecio.



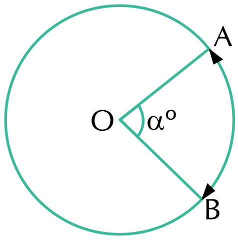
7. Calcule "x" en el gráfico mostrado.



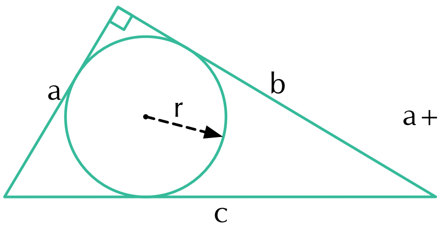
Aprende más...

Comunicación matemática

1. De acuerdo al gráfico, completar:

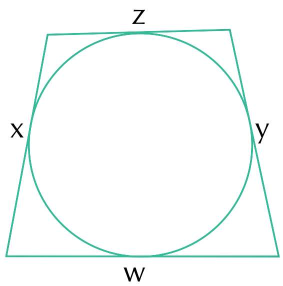


Si "O" es centro
$\Rightarrow m\overset{\frown}{AB}$ = ...

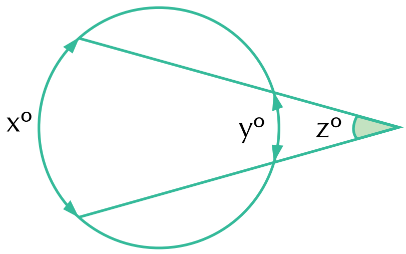


a + b = ... + ...

2. De acuerdo al gráfico, completar:



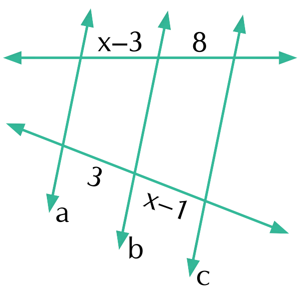
x + y = ... + ...



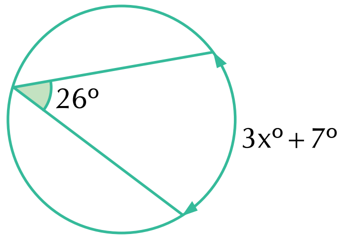
$\dfrac{x°-y°}{\text{........}}$ = ...

Resolución de problemas

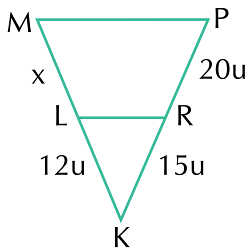
3. Si: $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b} // \overleftrightarrow{c}$, calcule "x" del gráfico mostrado.



4. Del gráfico, calcule "x".

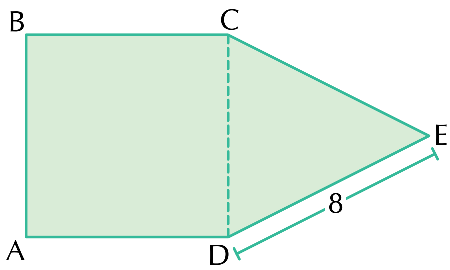


5. Si: $\overline{RL} // \overline{MP}$, calcule "x" del gráfico mostrado.

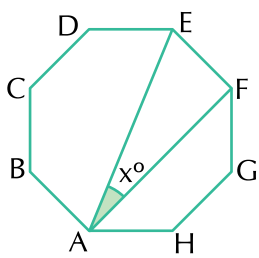


6. Si el área de una región circular es 81π u^2, calcule la longitud de la circunferencia.

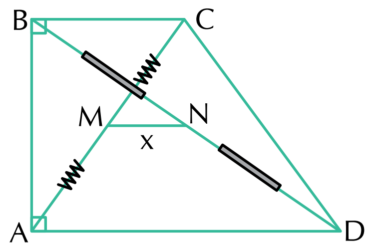
7. Calcule el área de la región sombreada, si los polígonos ABCD y CDE son regulares.



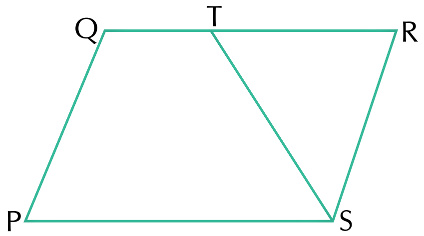
8. Si ABCDEFGH es un polígono regular, hallar "x°".



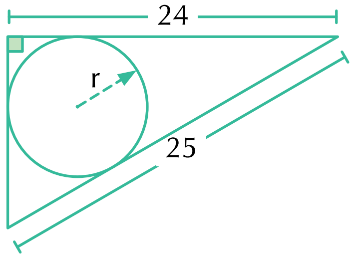
9. Del gráfico mostrado, si: m∢D = 37° y CD = 50u, calcule "x".



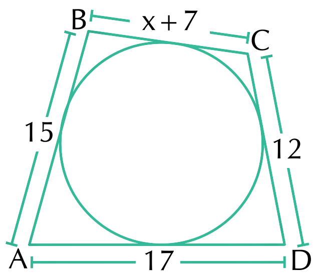
10. Si PQRS es un romboide y además: PQ = 12u; PS = 20u y $\overline{ST}$ es bisectriz, calcule "QT".



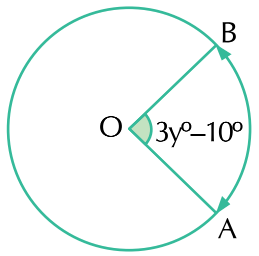
11. Calcule el inradio "r" del gráfico mostrado.



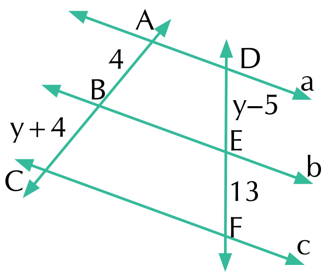
12. Calcule "x – 1" del gráfico mostrado.



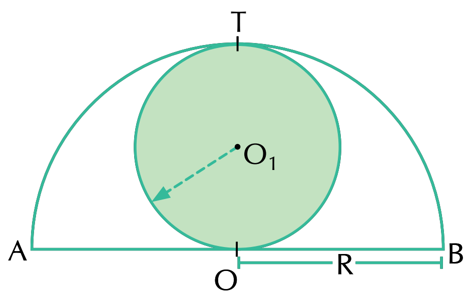
13. Calcular el valor de "y°" en el gráfico mostrado, si: $\overset{\frown}{AB} = 26°$ ("O" es centro de la circunferencia)



14. Hallar "y", si: $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b} // \overleftrightarrow{c}$ en el gráfico mostrado.

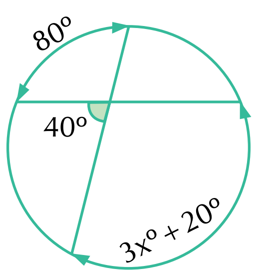


15. Calcule el área de la región sombreada. ("O" y "O_1" son centros y "T" es punto de tangencia)

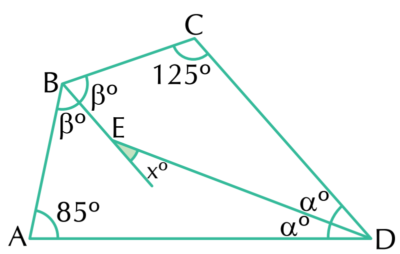


¡Tú puedes!

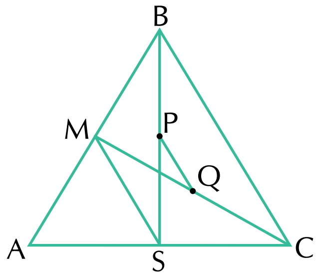
1. Del gráfico mostrado, calcule "x".



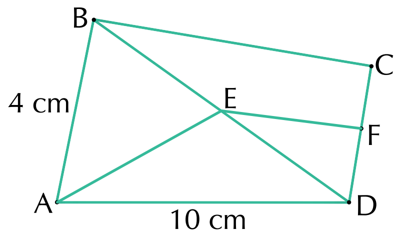
2. Del gráfico mostrado, calcule "x"



3. Si $\overline{MS}$ es base media de $\overline{BC}$; "P" es punto medio de $\overline{BS}$ y "Q" es punto medio de $\overline{MC}$, calcule "PQ", si además: $BC=28u$.

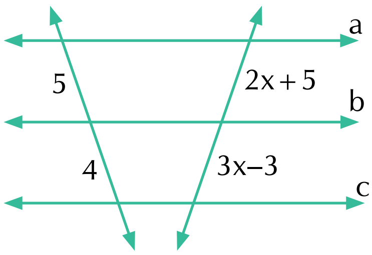


4. Calcule "FC" en el siguiente gráfico, si $\overline{AE}$ es bisectriz, $\overline{EF} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$ y $DC=7cm$.

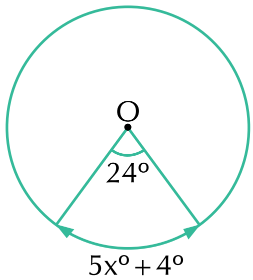


Practica en casa

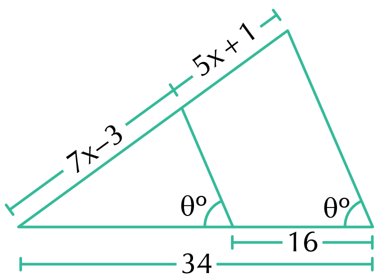
1. Si: $\overleftrightarrow{a} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{b} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{c}$, calcule "x" del gráfico mostrado



2. Si "O" es centro, calcule "x" en el gráfico mostrado



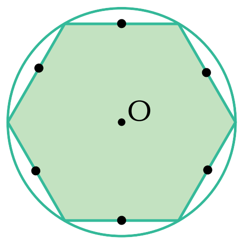
3. Calcule "x" en el gráfico mostrado.



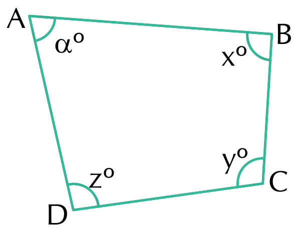
4. Calcule la longitud de una circunferencia de radio igual a 2,4u.

5. Siendo el perímetro de un triángulo equilátero igual a 24u, calcule el área de la región que encierra el triángulo.

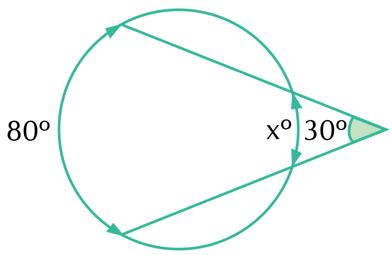
6. Dado el hexágono regular de perímetro igual a 30u, calcule el área de su región. ("O": Centro)



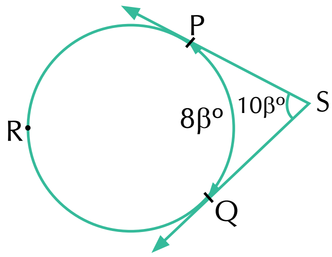
7. Si ABCD es un trapezoide y además: $x=8\alpha°$; $y=10\alpha°$; $z=5\alpha°$, calcule "x"



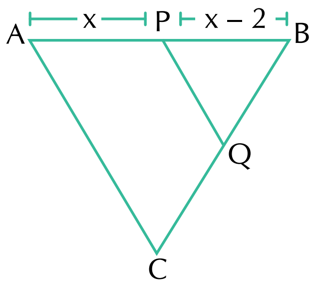
8. Calcule "x" en el gráfico mostrado.



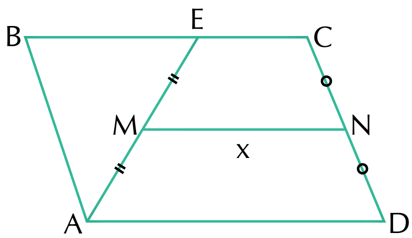
9. Calcule $m\widehat{PRQ}$ en el gráfico mostrado ("P" y "Q" puntos de tangencia)



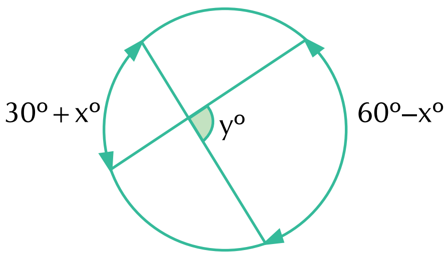
10. Calcule "x", si: CQ = 2(QB) y $\overline{AC}$ // $\overline{PQ}$



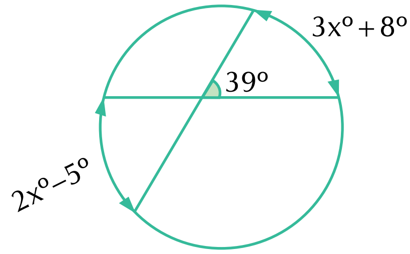
11. Si ABCD es un romboide, $\overline{AE}$ es bisectriz, CD = 15u y AD = 25u, calcule "x".



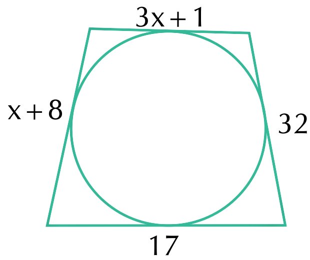
12. Calcule "y" del gráfico mostrado.



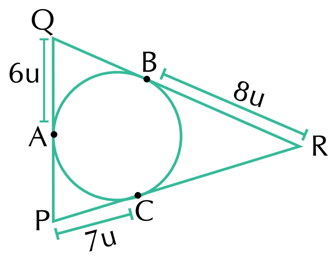
13. Calcule "x" del gráfico mostrado.



14. Calcule "x" en el gráfico mostrado.



15. Si "A", "B" y "C" son puntos de tangencia, Calcule el perímetro del triángulo PQR.



¿CÓMO SE CONSTRUYE LAS PIRÁMIDES?

Las pirámides de Gizeh. La más antigua de las maravillas y, curiosamente, la única que ha llegado hasta nosotros, es el monumental conjunto de las pirámides de Gizeh, en Egipto. Todos hemos oído hablar de ellas y conocemos su aspecto, así como sabemos que eran la tumba de los faraones.

Los egipcios iniciaron la construcción de pirámides hace muchísimo tiempo, a lo largo de su Antiguo Imperio: ¡Las más antiguas tienen cerca de cinco mil años! En efecto, la más antigua que se conoce es la pirámide escalonada de Sakkara, tumba del faraón Djoser, que data del 2750 a. de C. El arquitecto inventor de la pirámide fue el gran visir, y famoso sabio, Imhotep.

APRENDIZAJES ESPERADOS

Comunicación matemática

- Definir la semejanza de triángulos, relaciones métricas y los distintos tipos de áreas.
- Reconoce las propiedades que hay en cada uno de estos temas.

Resolución de problemas

- Analiza los datos disponibles y las relaciona con los diferentes tipos de áreas.
- Relaciona adecuadamente los datos numéricos y gráficos.

Semejanza de triángulos

En este capítulo aprenderemos:

- A identificar cuando dos triángulos son semejantes.
- A reconocer la diferencia entre triángulos semejantes y congruentes.
- A plantear la proporcionalidad de las longitudes de los lados de dos triángulos semejantes.
- A resolver los problemas relacionados con semejanza de triángulos.

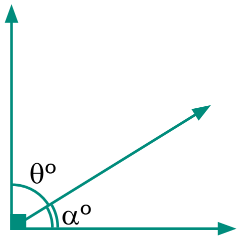
La maqueta del barco

Una maqueta es la reproducción física "a escala", en tres dimensiones, por lo general, en tamaño reducido, de algo real o ficticio. También pueden existir modelos de tamaño grande de algún objeto pequeño y hasta microscópico representados en alguna especie de maqueta.
Otras definiciones de maqueta, con variantes en el sistema de presentación son: los dioramas, los vehículos teledirigidos o radiocontrolados, como automóviles, trenes y barcos, etc.
La maqueta no solamente puede ser "a escala" sino también representa la simulación de cualquier cosa en otro material (por ejemplo, la maqueta de un teléfono celular hecha en cartón), sin el acabado ni la apariencia real.

- La maqueta es usada para reproducir a escala objetos de tamaño real

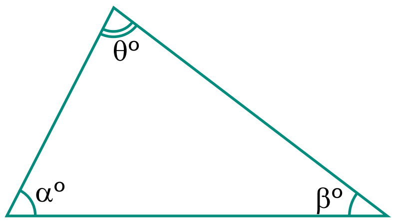
Saberes previos

- **Ángulos complementarios**



$\alpha^\circ + \theta^\circ = 90^\circ$

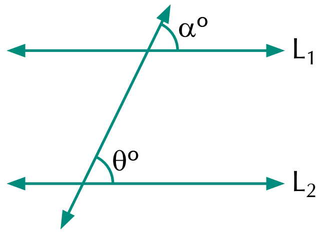
- **En todo triángulo**



$\alpha^\circ + \beta^\circ + \theta^\circ = 180^\circ$

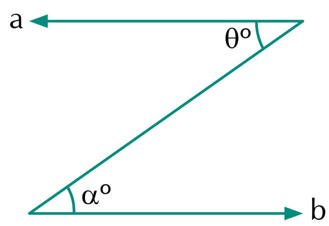
- **Ángulos entre rectas paralelas**

Si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$



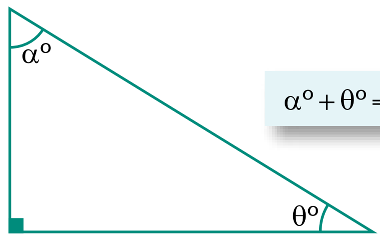
$\alpha^\circ = \theta^\circ$

Si: $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b}$



$\alpha^\circ = \theta^\circ$

- **En el triángulo rectángulo**



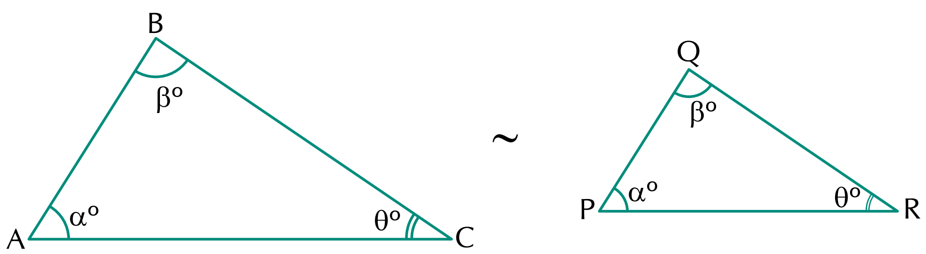
$\alpha^\circ + \theta^\circ = 90^\circ$

Conceptos básicos

Definición

Dos triángulos son semejantes, si sus ángulos interiores tienen igual medida y lados homólogos proporcionales.

Los lados homólogos son aquellos lados opuestos a los ángulos de igual medida.



- Símbolo de semejanza: ∼ (se lee "es semejante")
- Pares de lados homólogos: $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$; $\overline{BC}$ y $\overline{QR}$; $\overline{AC}$ y $\overline{PR}$

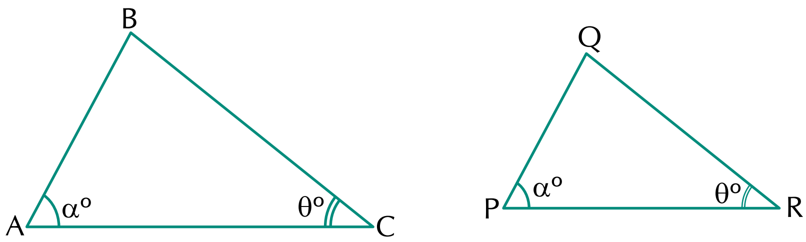
  En el gráfico: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

  Se cumple: $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$

Criterios de semejanza de triángulos

Caso 1

Dos triángulos son semejantes, si tienen al menos dos ángulos respectivamente de igual medida.

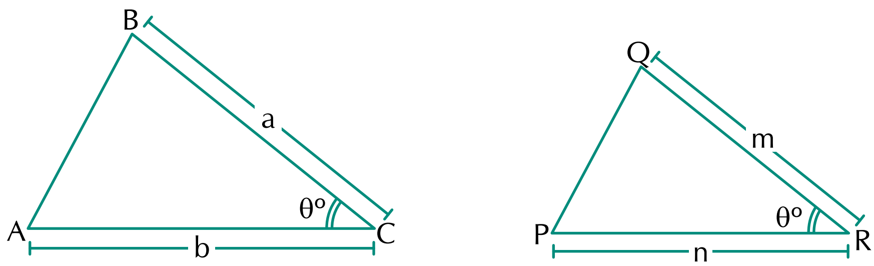


En el gráfico: $m\measuredangle BAC = m\measuredangle QPR$ y $m\measuredangle BCA = m\measuredangle QRP$

Entonces: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

Caso 2

Dos triángulos son semejantes, si tienen un ángulo de igual medida y la longitud de los lados que se determinan entre dicho ángulo son respectivamente proporcionales.

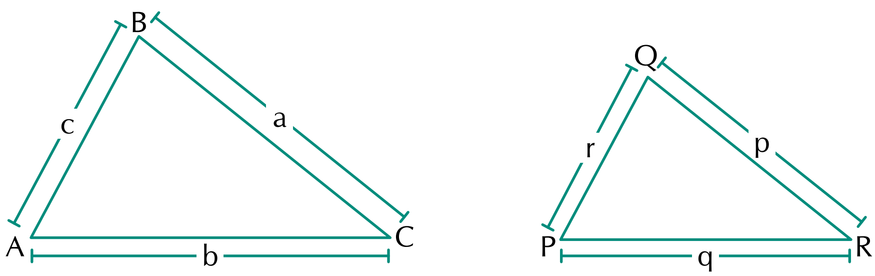


En el gráfico: $m\measuredangle BCA = m\measuredangle QRP$ y $\dfrac{b}{n} = \dfrac{a}{m} = k$

Entonces: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

Caso 3

Dos triángulos son semejantes, si las longitudes de sus lados son respectivamente proporcionales.



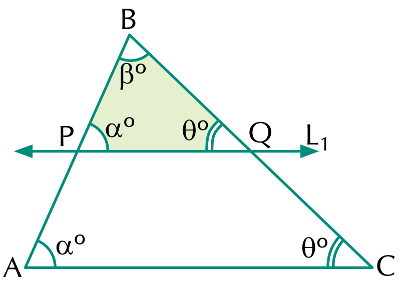
En el gráfico: $\dfrac{c}{r} = \dfrac{a}{p} = \dfrac{b}{q} = k$

Entonces: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

Observación

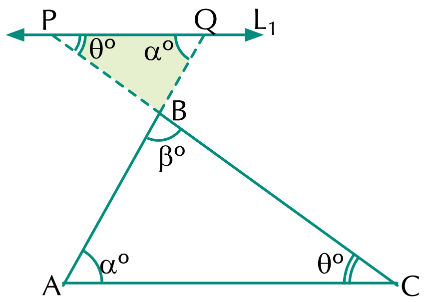
1. En todo triángulo al trazar una recta paralela a uno de sus lados, se forma un triángulo parcial semejante al total.

- Si: $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overline{AC}$

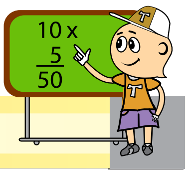


$\triangle ABC \sim \triangle PBQ$

- Si: $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overline{AC}$

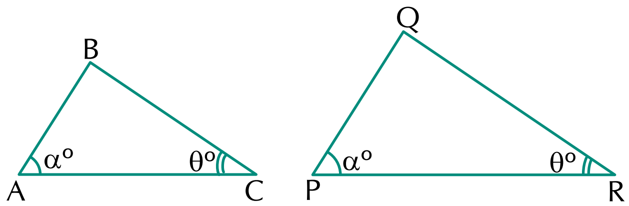


$\triangle ABC \sim \triangle QBP$

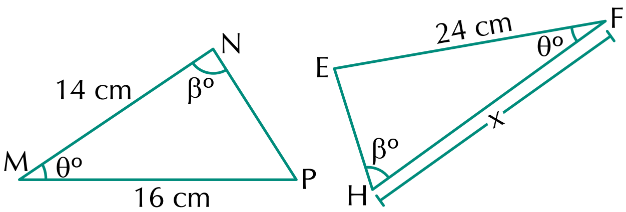


Aplica lo comprendido

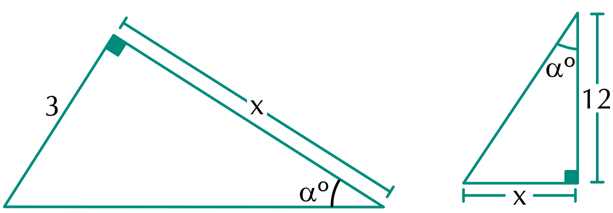
1. Si: AB = 6 cm; BC = 10 cm y PQ = 18 cm, calcule "QR".



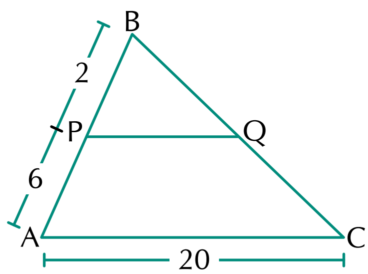
2. De los gráficos, calcule "x".



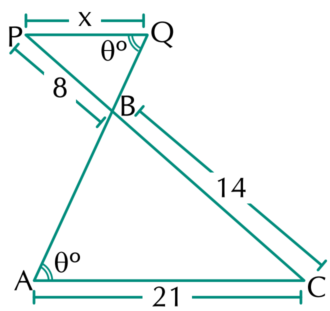
3. Calcule "x", de los gráficos mostrados.



4. Del gráfico, calcule "PQ", si: $\overline{PQ} \,//\, \overline{AC}$.



5. Del gráfico, calcule "x".

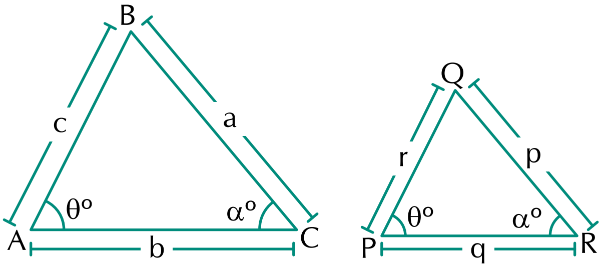


Aprende más...

Comunicación matemática

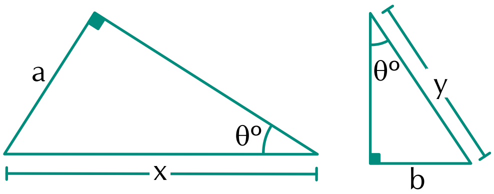
1. Graficar con una regla: un triángulo ABC y luego una recta $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overline{AC}$ que corta a $\overline{AB}$ en "R" y a $\overline{BC}$ en "S". Sombrea el triángulo RBS.

2. Completar en los cuadraditos en blanco, si los triángulos son semejantes:



$$\frac{c}{r} = \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

3. En los triángulos semejantes, plantea la proporción entre la longitud de sus lados. (Completar en los cuadraditos en blanco)

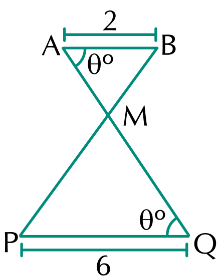


$$\frac{a}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

4. Indicar si es verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

- Dos triángulos son semejantes, si tres de sus lados son de igual medida ....(   )
- En dos triángulos semejantes, dos de sus lados homólogos son de igual medida ....(   )
- La palabra congruencia y semejanza son lo mismo ....(   )

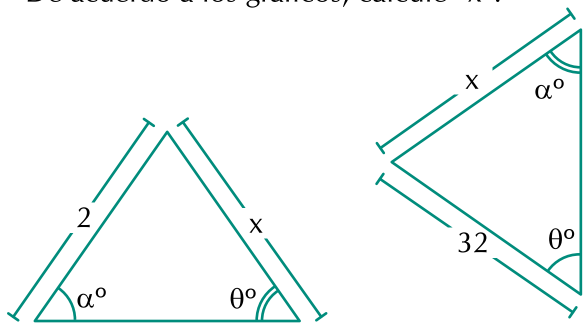
5. De acuerdo al gráfico, comparar la columna "A" con la columna "B", usando el signo ">"; "=" ó "<".



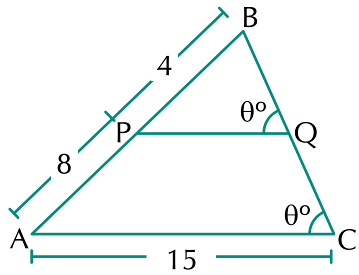
Columna "A"	Signo	Columna "B"
$\overline{PM}$		$2(\overline{MB})$

Resolución de problemas

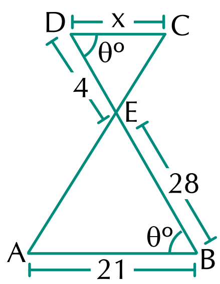
6. De acuerdo a los gráficos, calcule "x".



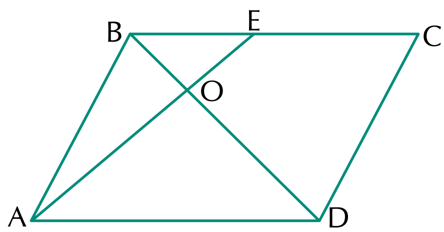
7. De acuerdo al gráfico, calcule "PQ".



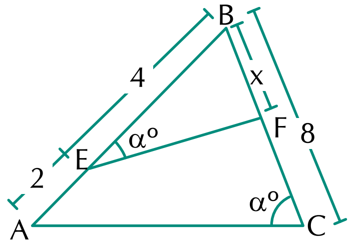
8. De acuerdo al gráfico, calcule "x".



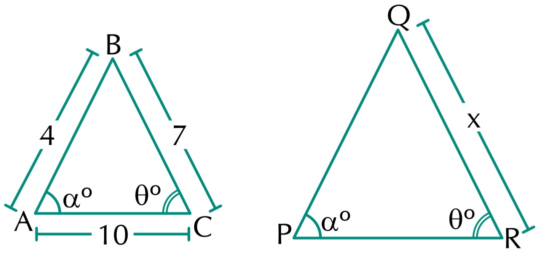
9. En el paralelogramo ABCD, se sabe que: BE = 6 cm; EC = 18 cm y AO = 12 cm, calcule "OE".



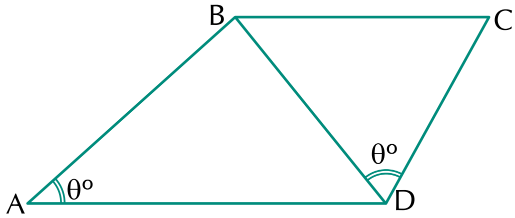
10. En el gráfico mostrado, calcule "x".



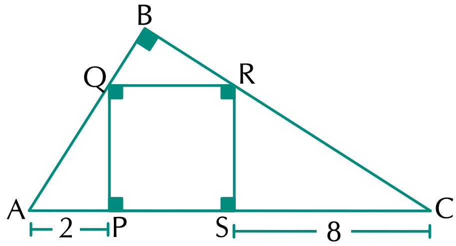
11. En el gráfico, calcular "x", si los triángulos son semejantes y además el perímetro del triángulo PQR es 147 cm.



12. En el gráfico: $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$. Calcule "BD", si: BC = 2 cm y AD = 8 cm.



13. Calcule el lado del cuadrado PQRS.



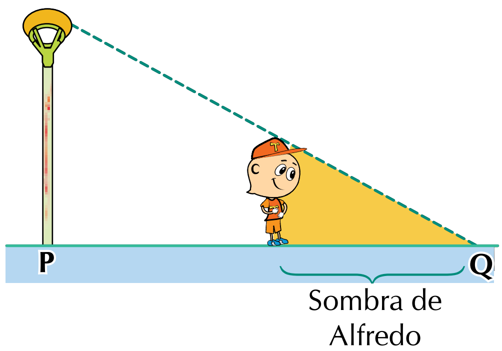
Aplicación cotidiana

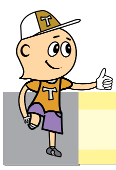
Trilcito está parado a 4 m de un poste que mide 6 m de alto. Trilcito desea calcular la medida horizontal de su sombra proyectada sobre el suelo.

14. Calcule dicha medida, si Trilcito mide 1,80 m.

15. Calcule la distancia $\overline{PQ}$.

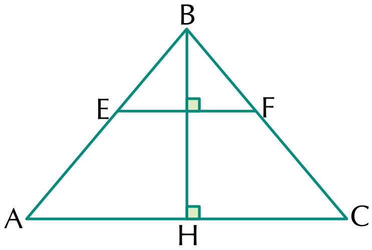
"El poste"



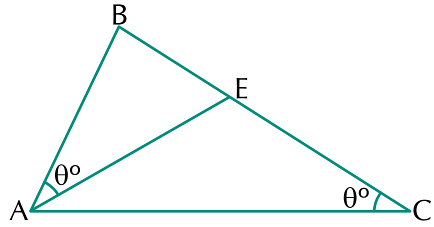


¡Tú puedes!

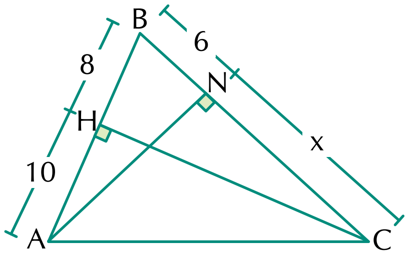
1. Si: EF = 6 cm; AC = 15 cm y BH = 10 cm, calcule la distancia del vértice "B" a $\overline{EF}$.



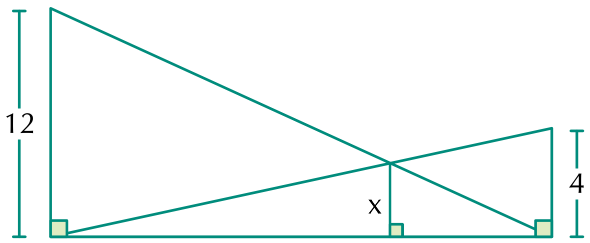
2. Calcule "AB", si: BE = 2 cm y EC = 6 cm.



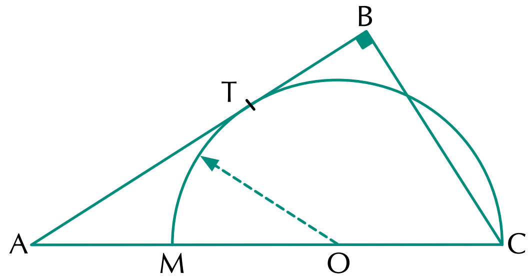
3. Según el gráfico, calcule "x".



4. Del gráfico, calcule "x".

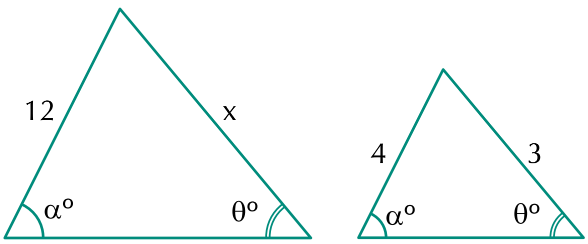


5. En la figura, calcule "TB", si: AB = 12 cm y BC = 5 cm ("T" punto de tangencia).

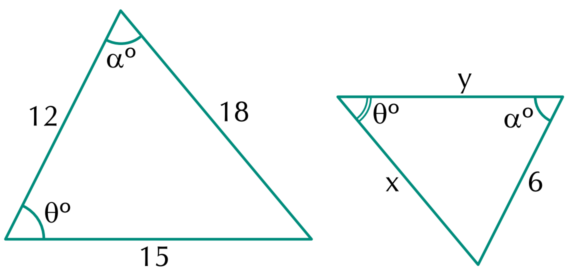


Practica en casa

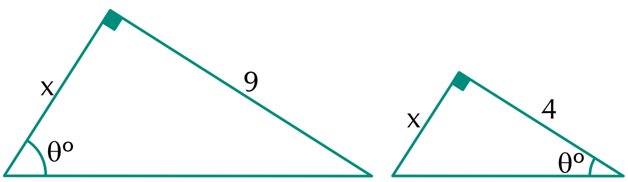
1. De los gráficos, calcule "x".



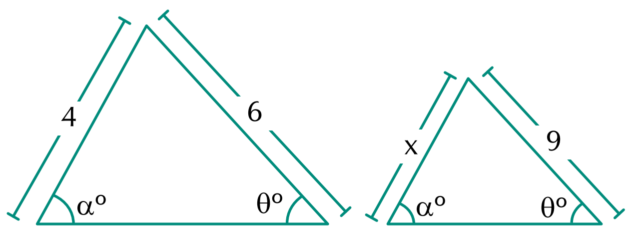
2. De los gráficos, calcule "x + y".



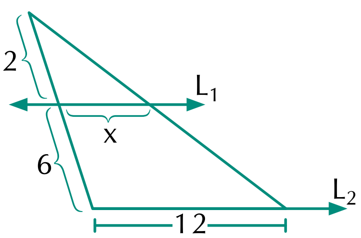
3. De los gráficos, calcule "x".



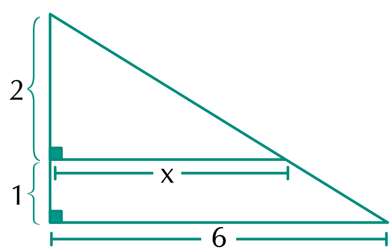
4. De los gráficos, calcule "x".



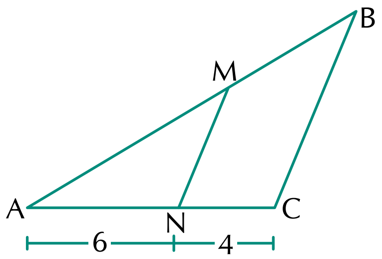
5. Del gráfico, calcular "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$.



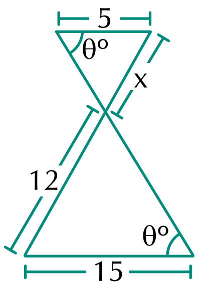
6. Del gráfico, calcular "x".



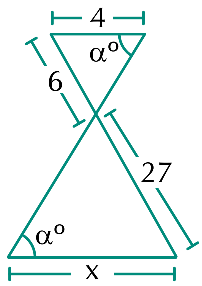
7. En la figura: $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$. Calcule "x", si: $MN=x-1$ y $BC=x+1$.



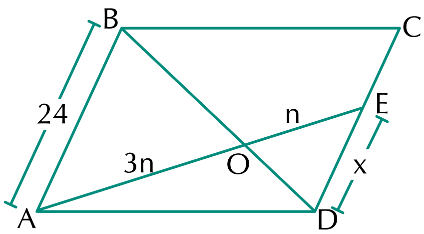
8. Del gráfico, calcule "x".



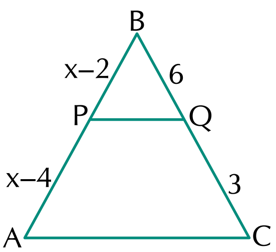
9. Del gráfico, calcule "x".



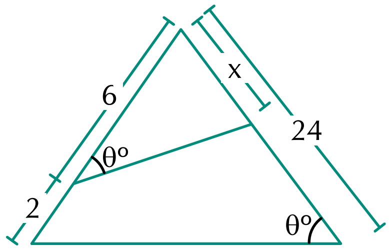
10. Del gráfico, calcule "x", si ABCD es un romboide.



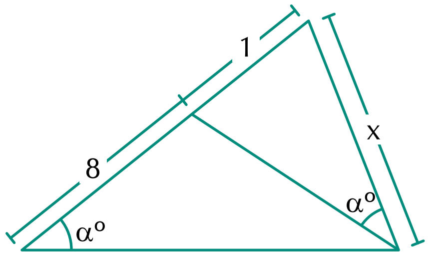
11. Del gráfico, calcule "x", si: $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$.



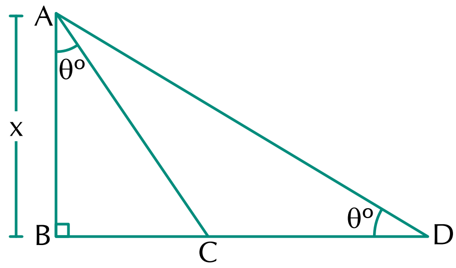
12. Del gráfico, calcule "x".



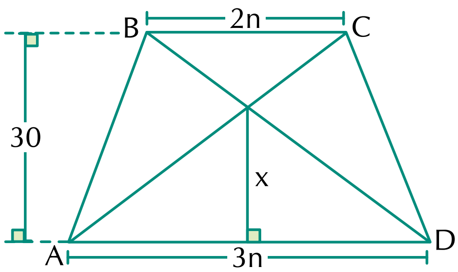
13. En la figura, calcule "x".



14. Si: $BC=1$ cm y $CD=3$ cm, calcular "x".



15. En la figura, ABCD es un trapecio, calcule "x".



Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

En este capítulo aprenderemos:

- A graficar la proyección ortogonal de un segmento.
- A reconocer y diferenciar todos los elementos del triángulo rectángulo.
- A aplicar los teoremas que se cumplen en el triángulo rectángulo.

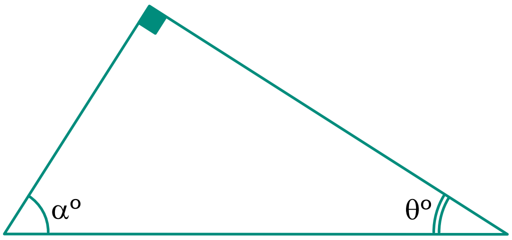
La excavadora Cover

Se denomina pala excavadora a una máquina autopropulsada, sobre neumáticos o orugas, con una estructura capaz de girar al menos 360º (en un sentido y en otro y de forma ininterrumpida) que excava o carga, eleva, gira y descarga materiales por la acción de la cuchara, fijada a un conjunto formado por una pluma y un brazo o balancín, sin que la estructura portante o chasis se desplace.

En la maquinaria pesada todas las piezas guardan ciertas relaciones métricas , las cuales les permiten realizar un trabajo bastante efectivo.

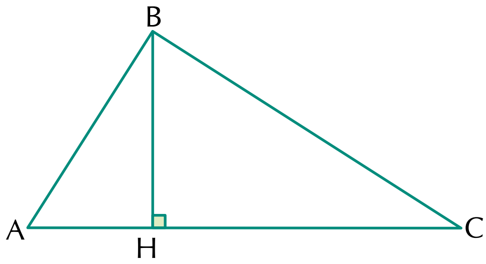
Saberes previos

- **Triángulo rectángulo**



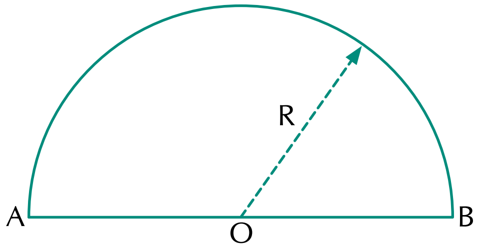
$$\alpha^o + \theta^o = 90^o$$

- **Altura**



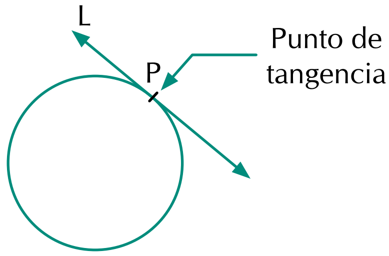
$\overline{BH}$: altura relativa a $\overline{AC}$.

- **Semicircunferencia**



$\overline{AB}$: diámetro

- **Recta tangente**



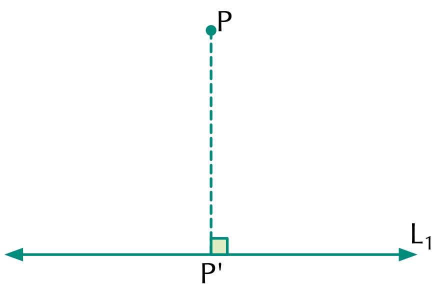
$\overleftrightarrow{L}$: recta tangente.

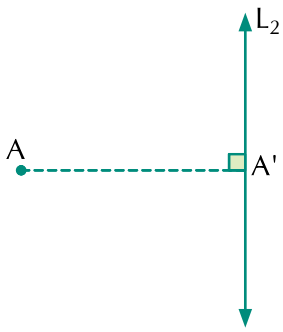
Conceptos básicos

Proyección ortogonal

Proyección ortogonal de un punto

Es el pie de la perpendicular trazada por dicho punto a la recta. Esta perpendicular se denomina "proyectante" y la recta "eje de proyección".

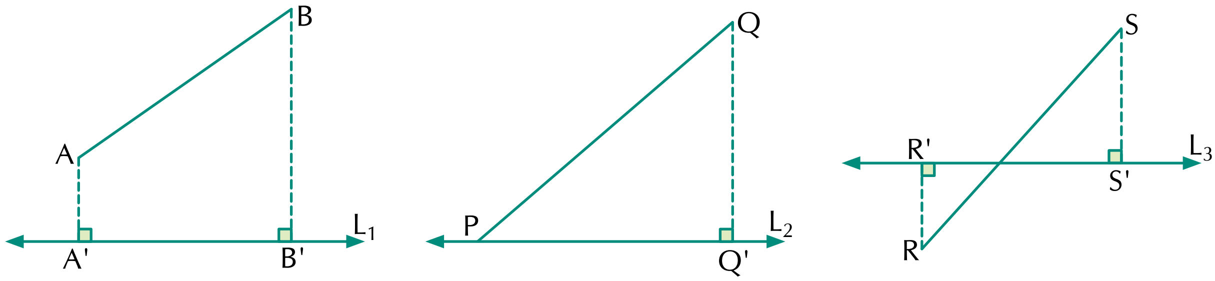




- P': proyección ortogonal de "P" sobre la recta $\overleftrightarrow{L_1}$.
- A': proyección ortogonal de "A" sobre la recta $\overleftrightarrow{L_2}$
- $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$: ejes de proyección

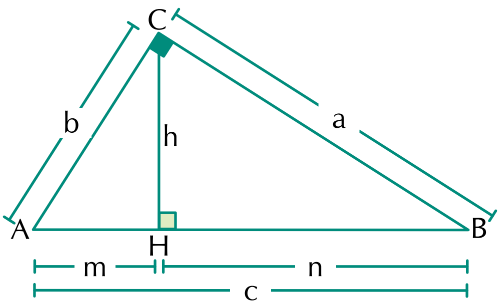
Proyección ortogonal de un segmento

La proyección ortogonal de un segmento sobre una recta, es la parte del eje de proyección comprendida entre las proyecciones de los extremos del segmento a proyectar.



- $\overline{A'B'}$: proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre la recta $\overleftrightarrow{L_1}$
- $\overline{PQ'}$: proyección ortogonal de $\overline{PQ}$ sobre la recta $\overleftrightarrow{L_2}$
- $\overline{R'S'}$: proyección ortogonal de $\overline{RS}$ sobre la recta $\overleftrightarrow{L_3}$

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo

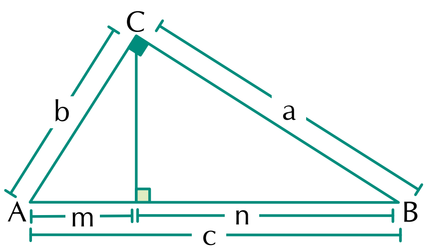


En el gráfico:

- $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$: catetos.
- $\overline{AB}$: hipotenusa.
- $\overline{CH}$: altura relativa a la hipotenusa.
- $\overline{AH}$ y $\overline{HB}$: proyecciones de $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ sobre $\overline{AB}$ respectivamente

También: $\triangle ABC \sim \triangle AHC \sim \triangle BHC$

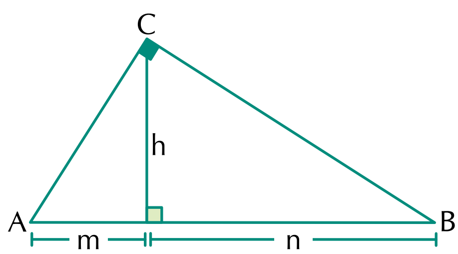
Teorema 1: En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de un cateto es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa.



$b^2 = m.c$

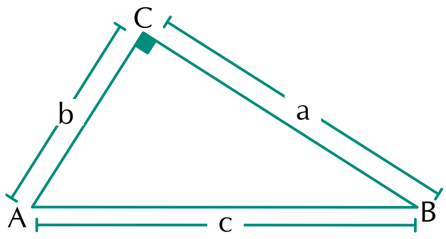
$a^2 = n.c$

Teorema 2: El cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa, es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre dicha hipotenusa.



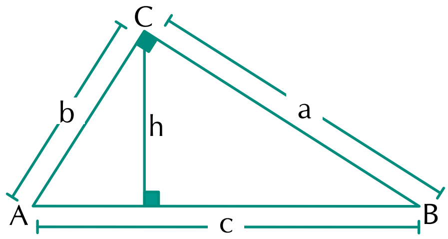
$h^2 = m.n$

Teorema 3: El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos (Teorema de Pitágoras).



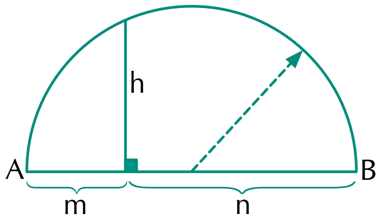
$c^2 = a^2 + b^2$

Teorema 4: El producto de las longitudes de sus catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y la altura relativa a ella.



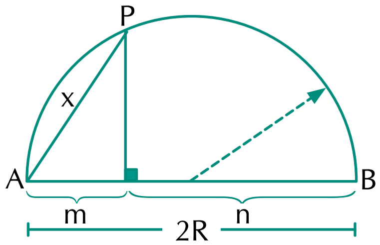
$a.b = c.h$

Observación



$\overline{AB}$: diámetro

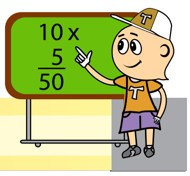
$h^2 = m.n$



$\overline{AB}$: diámetro; R: radio

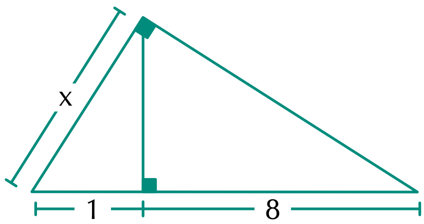
$x^2 = (m)(2R)$

También: $m + n = 2R$

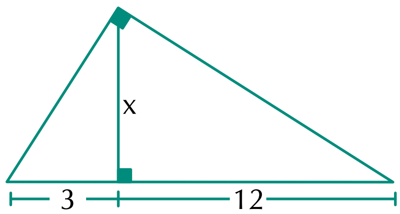


Aplica lo comprendido

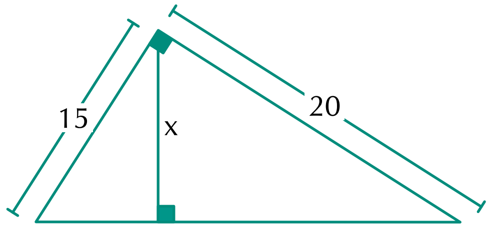
1. Calcule "x" en el gráfico mostrado.



2. Calcule "x" en el gráfico mostrado.

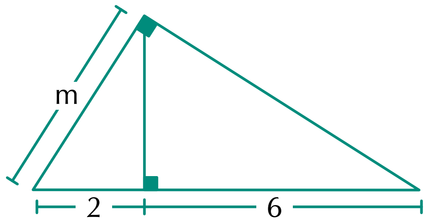


3. En el gráfico mostrado, calcule "x".

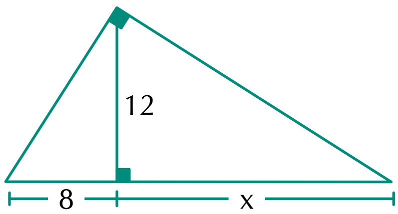


4.

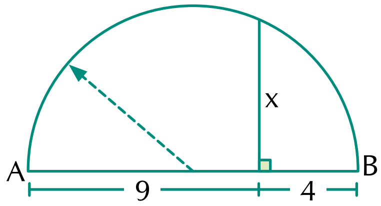
- En el gráfico mostrado, calcule "m".

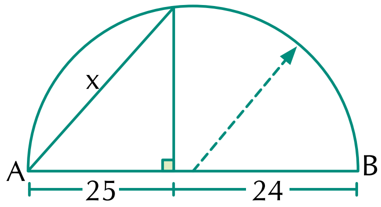


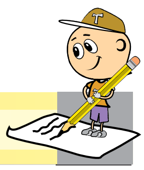
- En el gráfico mostrado, calcule "x".



5. En cada caso, calcule "x".

- 

- 



Aprende más...

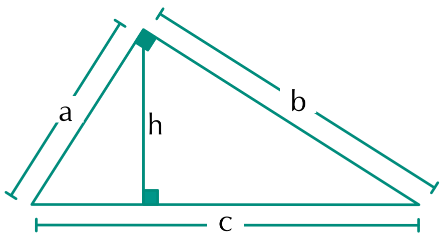
Comunicación matemática

1. Graficar haciendo uso de la regla

- Un triángulo rectángulo ABC, recto en "B", luego traza la altura $\overline{BH}$ relativa a la hipotenusa y sombrea el triángulo ABH.

- Una semicircunferencia de diámetro $\overline{PQ}$. Sobre el arco PQ se toma el punto "M" y luego traza "M" con "P" y "M" con "Q".

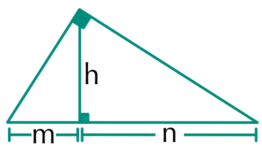
2. Del gráfico mostrado, completar los cuadraditos en blanco.



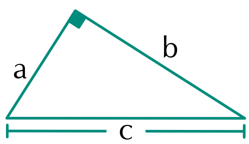
$c^2 = \square + \square$

$a \,.\, \square = c \,.\, \square$

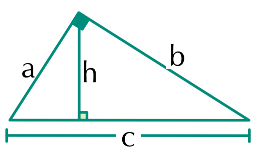
3. Relaciona, haciendo uso de flechas.



• • $a^2 + b^2 = c^2$

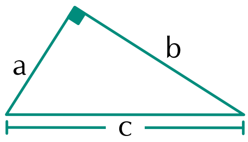


• • $a \,.\, b = c.h$

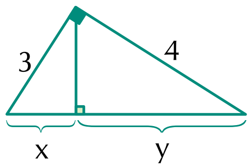


• • $h^2 = m.n$

4. De acuerdo al gráfico mostrado, comparar cada relación indicando si es ">"; "<" ó "=".



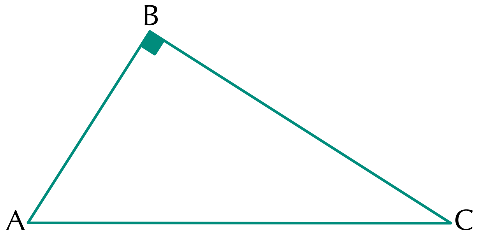
c $\boxed{\quad\quad}$ a



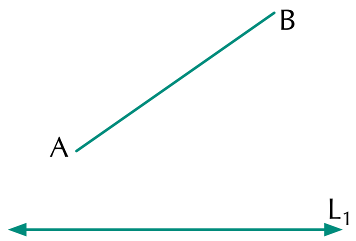
x + y $\boxed{\quad\quad}$ 8

5. Completa el gráfico en cada caso.

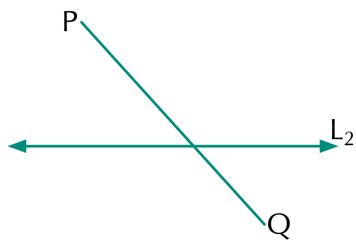
a) Traza la altura $\overline{BH}$ relativa a $\overline{AC}$.



b) Grafica la proyección ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{L_1}$.

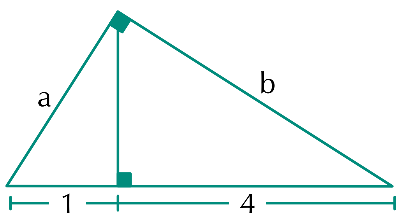


c) Grafica la proyección ortogonal de $\overline{PQ}$ sobre $\overleftrightarrow{L_2}$

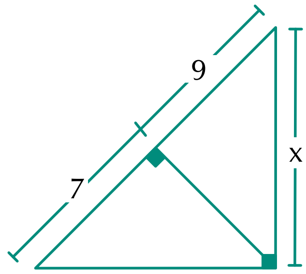


Resolución de problemas

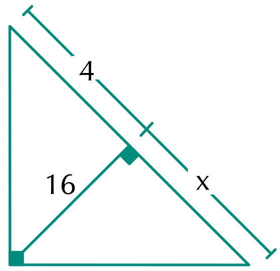
6. En la figura, calcule "$\frac{a}{b}$"



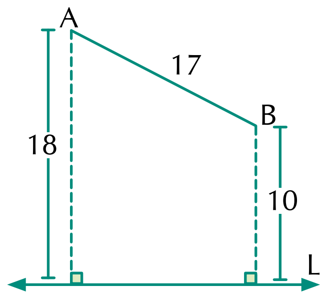
7. En el gráfico, calcule "x".



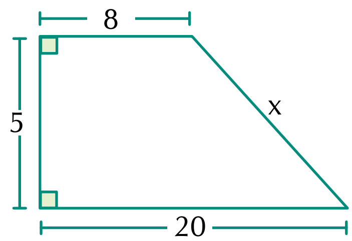
8. En la figura, calcule "x".



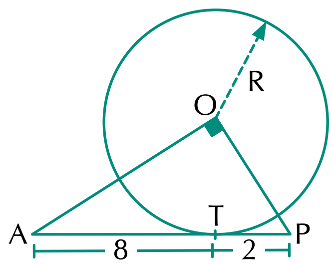
9. En la figura, calcule la proyección de $\overline{AB}$ sobre la recta $\overleftrightarrow{L}$.



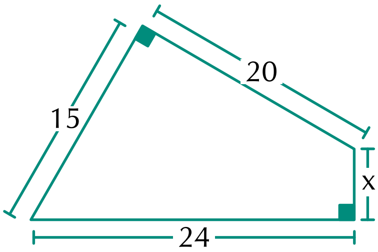
10. En la figura, calcule "x".



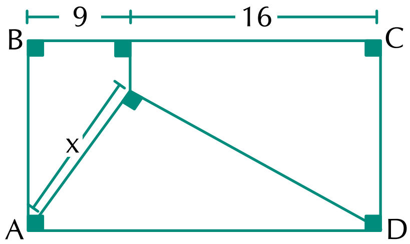
11. En la figura, "O" es centro de la circunferencia y "T" es punto de tangencia. Calcule el radio de dicha circunferencia.



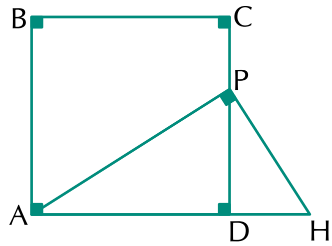
12. En el gráfico mostrado, calcular "x".



13. En el gráfico mostrado, calcular "x".



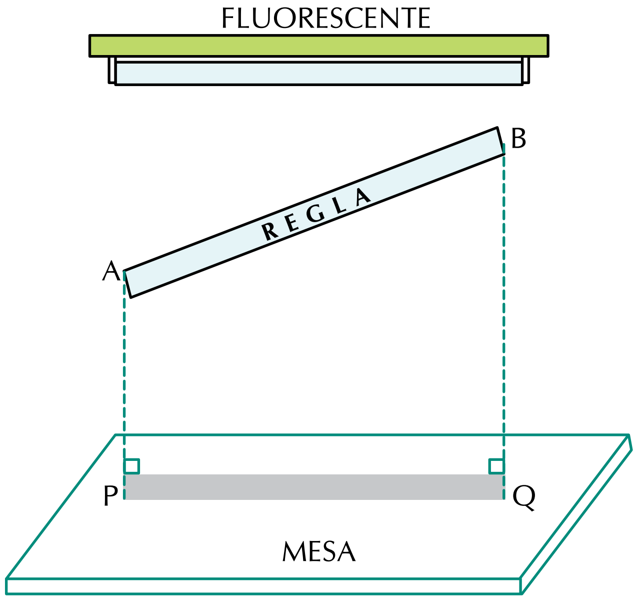
14. En la figura, ABCD es un cuadrado de lado 5 cm. Si: CP = 3 cm, calcular "DH".

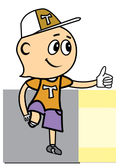


Aplicación cotidiana

La regla del profesor

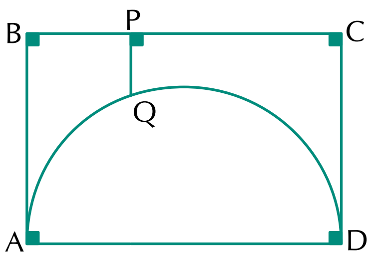
15. En el gráfico, al encender el fluorescente la regla proyecta una sombra de 24 cm de longitud ($\overline{PQ}$). Si las distancias $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ miden respectivamente 18 y 28 cm, calcule la longitud de la regla.



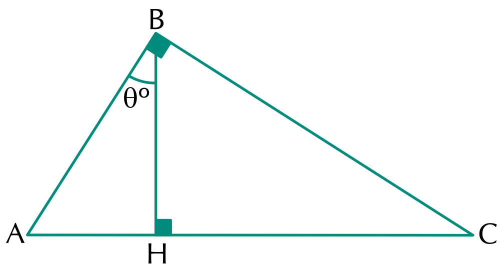


¡Tú puedes!

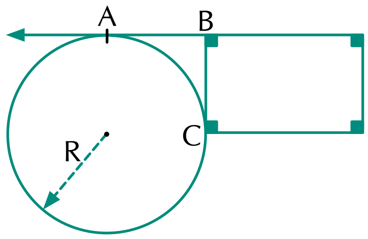
1. En la figura, se muestra un rectángulo ABCD y una semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$. Calcule "PQ", si: BP = 4 cm; AD = 13 cm y AB = 8 cm.



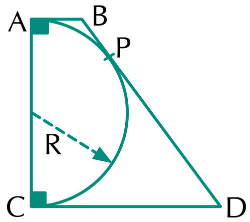
2. Si: $\frac{AH}{HC} = \frac{1}{3}$, calcule "θ".



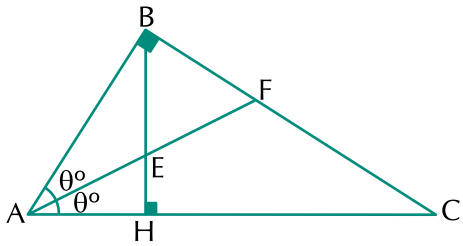
3. Calcule "R", si: AB = 15 cm y BC = 9 cm. ("A" es punto de tangencia).



4. En la figura, calcule "R", si: AB = 6 cm y CD = 24 cm. ("P" es punto de tangencia).

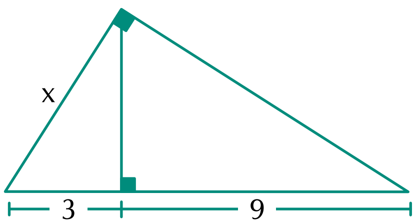


5. En la figura, si: AF.EF = 50 cm^2, calcule "BE".

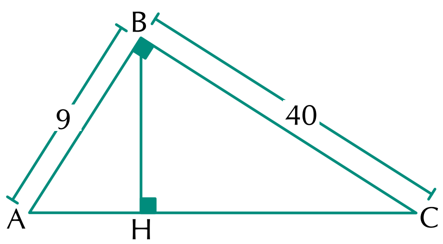


Practica en casa

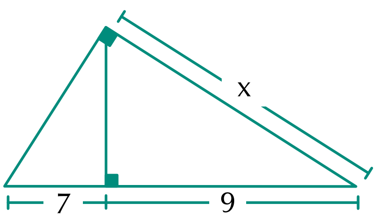
1. Del gráfico, calcule "x".



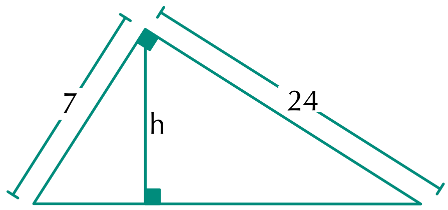
2. Del gráfico, calcule "BH".



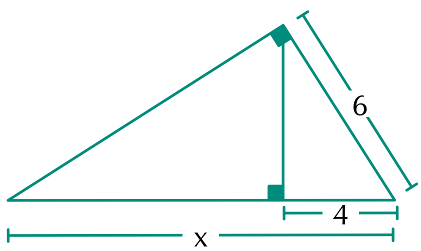
3. Del gráfico, calcule "x".



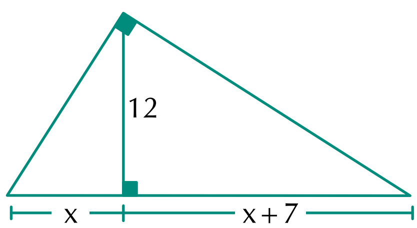
4. Del gráfico, calcule "h".



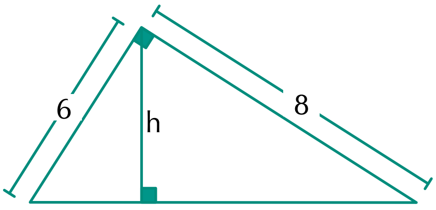
5. Del gráfico, calcule "x".



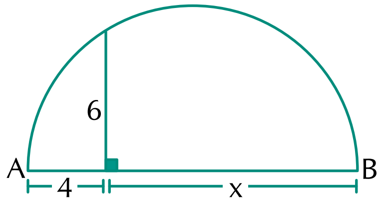
6. Del gráfico, calcule "x".



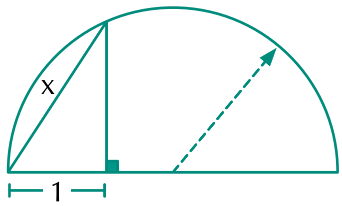
7. Del gráfico, calcule "h".



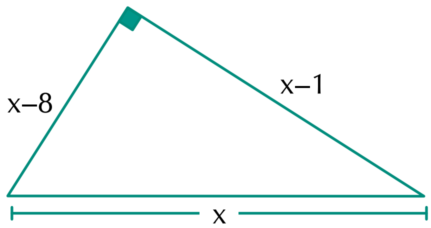
8. Calcule "x", si $\overline{AB}$ es diámetro.



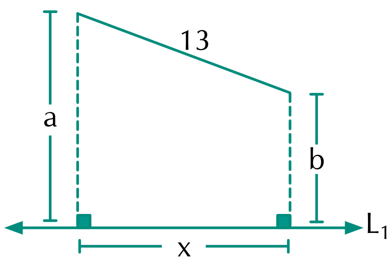
9. Si el radio de la semicircunferencia es 8 cm, calcule "x".



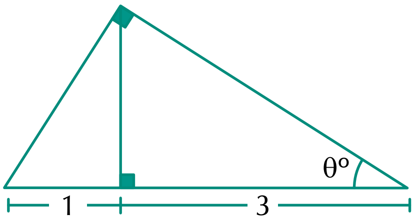
10. Del gráfico, calcule "x".



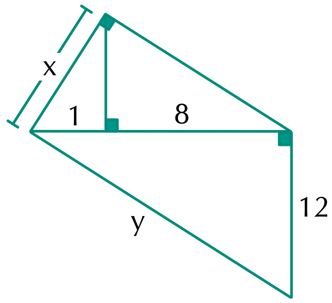
11. Del gráfico, calcule "x", si: a–b = 5.



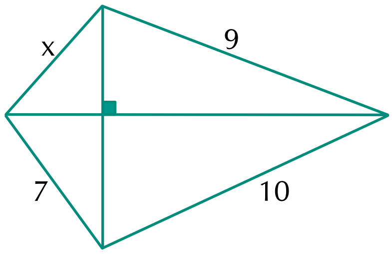
12. Del gráfico, calcule "θ".



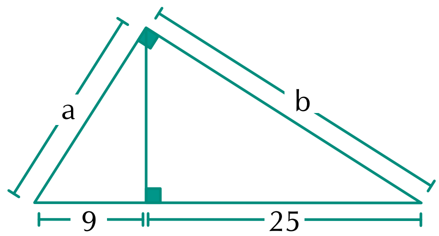
13. Del gráfico, calcule "x + y".



14. Del gráfico, calcule "x".



15. En la figura, calcule "$\frac{a}{b}$".



Áreas de regiones poligonales

En este capítulo aprenderemos:

- A reconocer la diferencia entre área y región.
- A aplicar la fórmula del cálculo de áreas de regiones triangulares y cuadrangulares.
- A desarrollar diversos problemas sobre el cálculo de áreas de regiones triangulares y cuadrangulares.

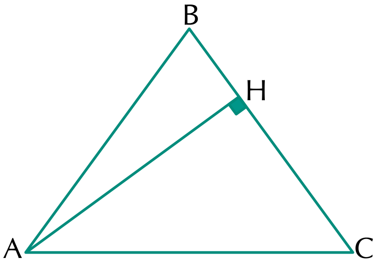
Jardín poligonal

Los Jardines tienen su origen entre los años 1630 y 1640, cuando el Conde-Duque de Olivares (Don Gaspar de Guzmán y Pimentel), valido de Felipe IV (1621–1665), le regaló al rey unos terrenos que le habían sido cedidos por el Duque de Fernán Núñez para el recreo de la Corte en torno al Monasterio de los Jerónimos de Madrid. Así, con la reforma del Cuarto Real que había junto al Monasterio, se inició la construcción del Palacio del Buen Retiro. Contaba entonces con unas 145 hectáreas. Aunque esta segunda residencia real iba a estar en lo que en aquellos tiempos eran las afueras de la villa de Madrid, no estaba excesivamente lejos del alcázar y resultó ser un lugar muy agradable por estar en una zona muy boscosa y fresca.

- En el jardín mostrado, ¿existen regiones poligonales?

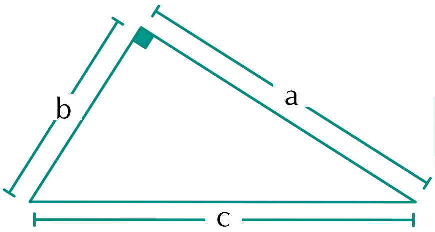
Saberes previos

- **Altura**



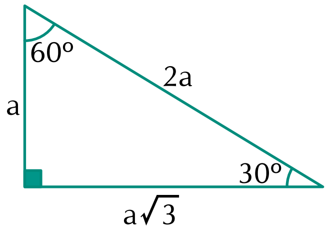
$\overline{AH}$: altura relativa a $\overline{BC}$.

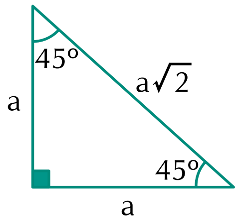
- **Triángulo rectángulo**

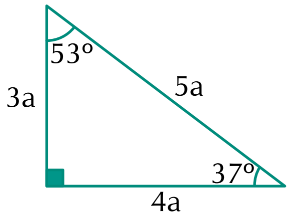


$$c^2 = a^2 + b^2$$

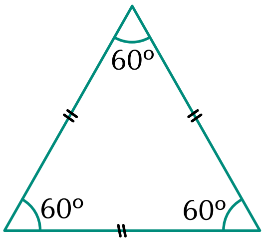
- **Triángulos notables**







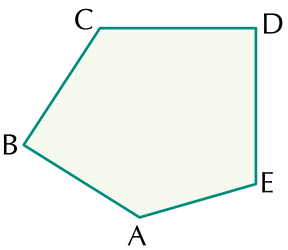
- **Triángulo equilátero**



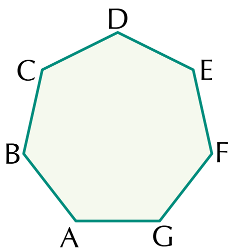
Recuerda que sus tres alturas son congruentes

Conceptos básicos

Región: Es la porción de una superficie limitada por una línea cerrada, denominada frontera o perímetro.

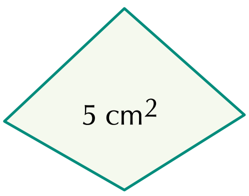


Región pentagonal ABCDE

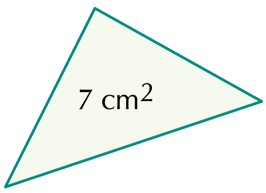


Región heptagonal ABCDEFG

Área: Es la medida de la región y se expresa mediante un número real positivo, acompañado de unidades cuadráticas.



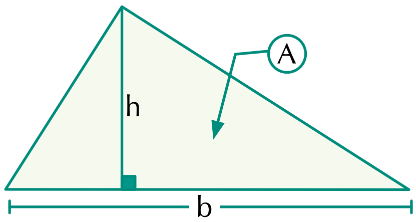
Región cuadrangular de área 5 cm^2

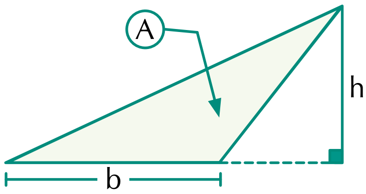


Región triangular de área 7 cm^2

Áreas de regiones triangulares

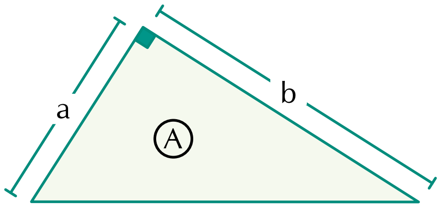
Área de la región de un triángulo cualquiera (A)

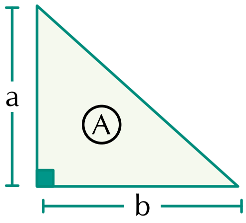




$$A = \frac{b.h}{2}$$

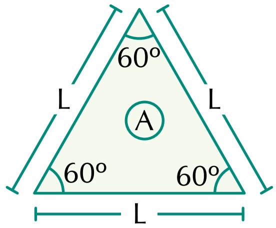
Área de la región de un triángulo rectángulo (A)





$$A = \frac{a.b}{2}$$

Área de la región de un triángulo equilátero (A)

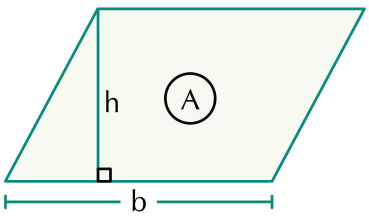


$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4}$$

Áreas de regiones cuadrangulares

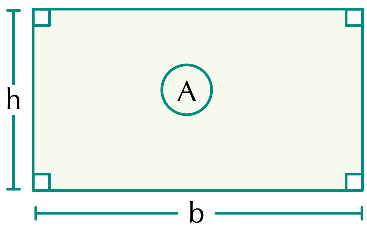
Paralelogramos

- **Romboide**



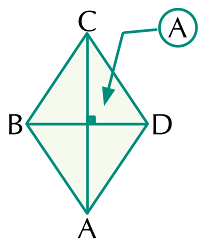
$$A = b.h$$

- **Rectángulo**



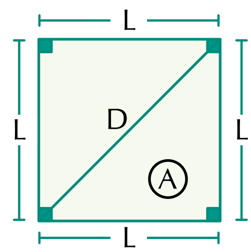
$$A = b.h$$

- **Rombo**



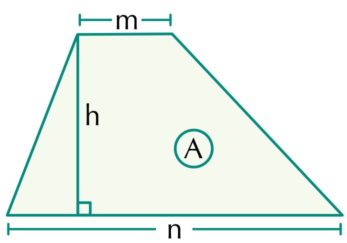
$$A = \frac{(AC)(BD)}{2}$$

- **Cuadrado**



$$A = L^2 = \frac{D^2}{2}$$

- **Trapecio**

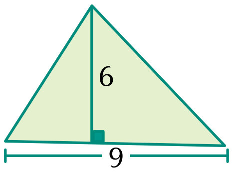


$$A = \left(\frac{m+n}{2}\right)(h)$$

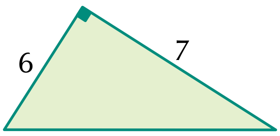
$$A = (\text{mediana})\ (h)$$

Aplica lo comprendido

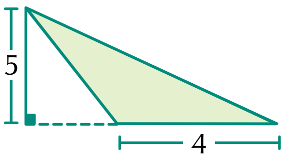
1. Calcule el área de las regiones triangulares mostradas.



A =

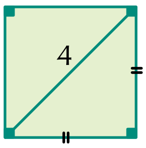


A =

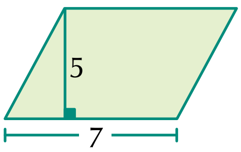


A =

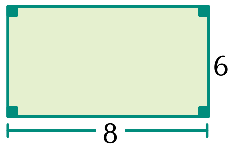
2. Calcule el área de las regiones cuadrangulares mostradas.



A =

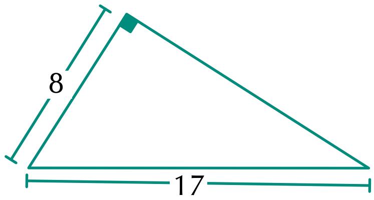


A =

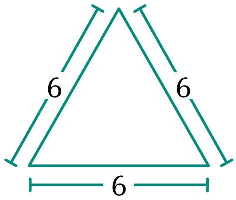


A =

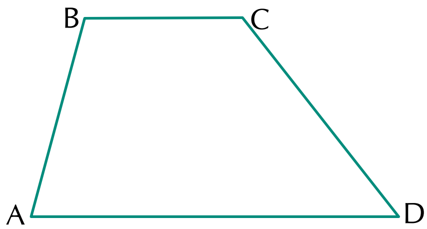
3. Calcule el área de la región triangular mostrada.



4. Calcule el área del triángulo equilátero mostrado.



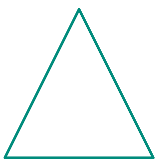
5. En la figura, se muestra un trapecio ABCD. Si: BC = 9 cm y AD = 14 cm, calcule su altura, si su área es 138 m^2.

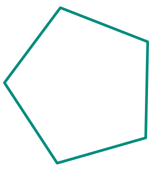


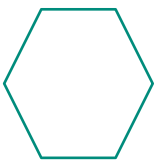
Aprende más...

Comunicación matemática

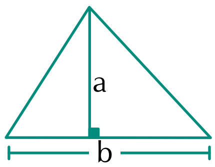
1. Relaciona mediante una línea.

 • • Región hexagonal

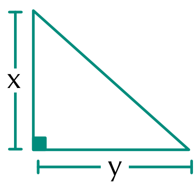
 • • Región triangular

 • • Región pentagonal

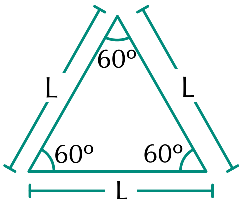
2. Completa las expresiones en el recuadro, de acuerdo al gráfico mostrado.



$$\text{Área} = \frac{(\quad)(b)}{2}$$

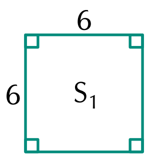


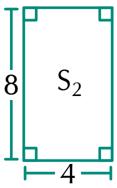
$$\text{Área} = \frac{(x)(\quad)}{2}$$



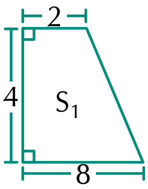
$$\text{Área} = \frac{(\quad)\sqrt{3}}{4}$$

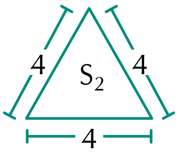
3. De acuerdo a los gráficos mostrados, indicar que área es mayor (S_2 o S_1) colocando los signos ">" o "<".





S_2 ☐ S_1

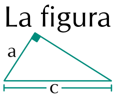




S_1 ☐ S_2

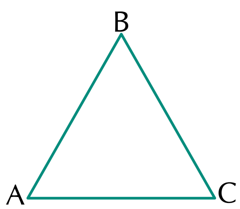
4. Graficar haciendo uso de la regla: un triángulo ABC y trazar la altura $\overline{AH}$ relativa a $\overline{BC}$. Sombrea el triángulo AHC.

5. Indicar si es verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

- El área y la región son conceptos iguales ....(   )
- El área de un rectángulo se calcula como el semiproducto de sus lados ....(   )
- La figura muestra un triángulo rectángulo:  , entonces su área se calcula como: $\frac{a.c}{2}$ .... (   )

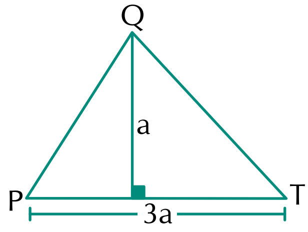
Resolución de problemas

6. Si el perímetro del triángulo equilátero ABC mostrado es 36 cm, calcule el área de su región.

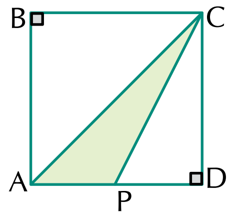


7. Los catetos de un triángulo rectángulo están en la relación de 3 es a 4. Si el área de su región es de 54 cm², calcule el valor de la hipotenusa.

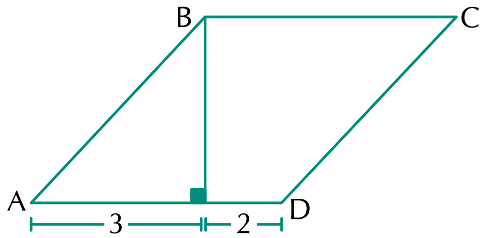
8. En la figura mostrada, calcule "a", si el área de la región triangular PQT es 24 cm².



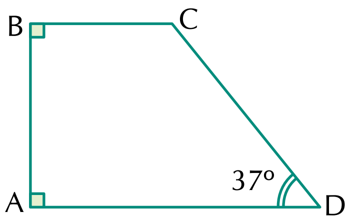
9. Si el lado del cuadrado ABCD es de 6 cm, calcule el área de la región sombreada. Además: PD = 2(AP).



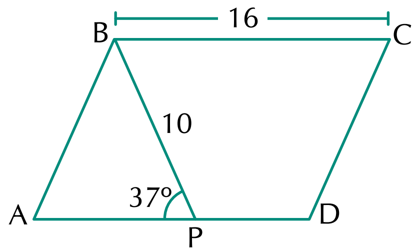
10. En el rombo ABCD, calcule el área de su región.



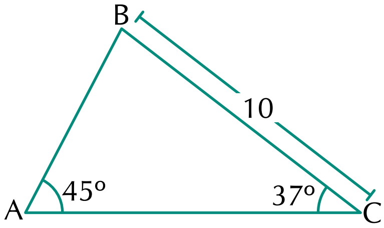
11. Calcule el área de la región del trapecio ABCD, si: BC = 4 cm y CD = 10 cm.



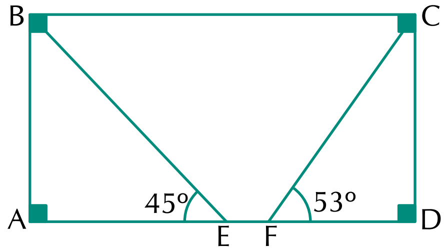
12. Calcule el área de la región romboidal ABCD.



13. En el triángulo ABC mostrado, calcule el área de su región.



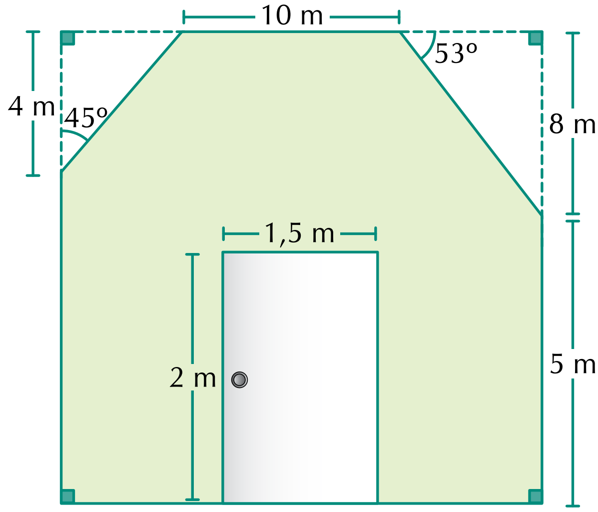
14. Si: CF = 5 cm y EF = 2 cm, calcular el área de la región rectangular ABCD.

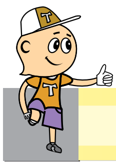


Aplicación cotidiana

El frontis de la casa

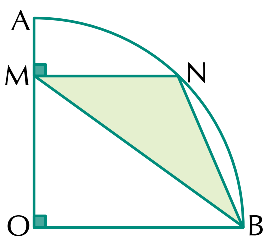
15. Por fin de año, Eduardo desea pintar el frontis de su casa con la información brindada en el gráfico. Calcular el área de la pared que será pintada por estas festividades. (en m^2).



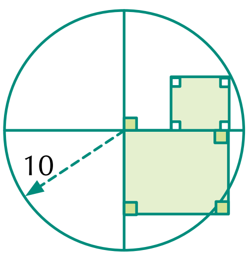


¡Tú puedes!

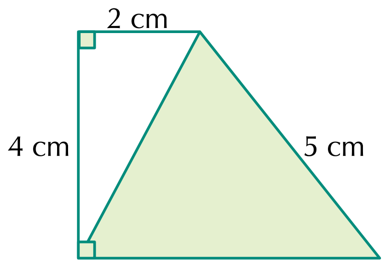
1. Si: OA = OB = 3 m y MN = 1 m, calcule el área de la región sombreada. ("O" es centro)



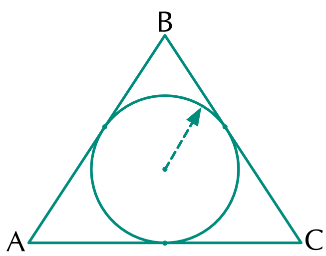
2. Si las regiones sombreadas son cuadrados, calcule la suma de sus áreas.



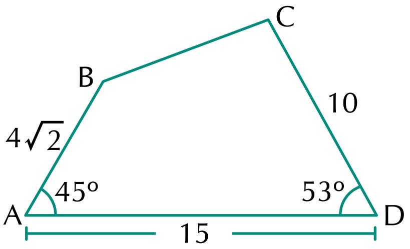
3. Calcular el área de la región sombreada.



4. En la figura, calcule el área del triángulo equilátero ABC, si el radio de la circunferencia inscrita mide 2 cm.

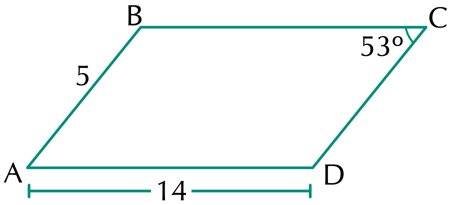


5. En la figura, calcule el área de la región del trapezoide ABCD.

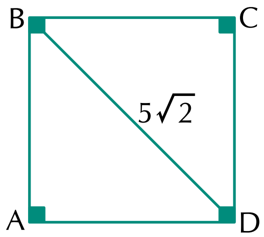


Practica en casa

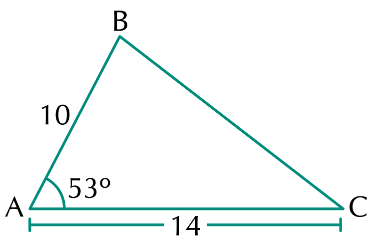
1. Calcule el área de la región del romboide ABCD.



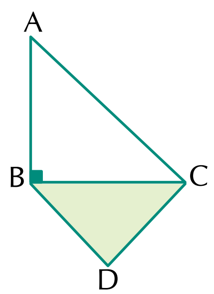
2. Calcule el área de la región del cuadrado ABCD.



3. Calcule el área de la región triangular ABC.

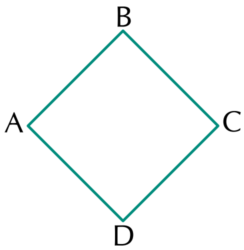


4. En la figura, calcule el área del triángulo equilátero BDC, si: AB = 3 cm y AC = 5 cm.

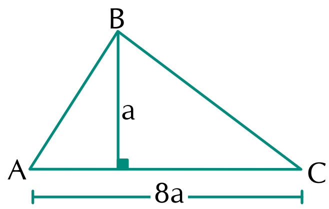


5. Calcule el área de la región del rectángulo ABCD, si: AB = 3 cm y AC = 5 cm.

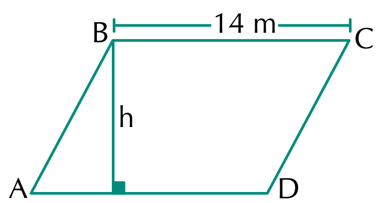
6. Si ABCD es un rombo y además: AC = 16 cm y BD = 20 cm, calcule el área de la región del rombo.



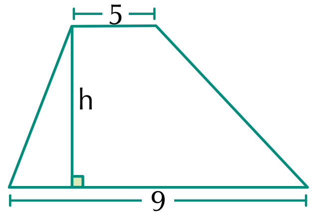
7. Si el área de la región triangular ABC es 48 cm^2, calcule "a".



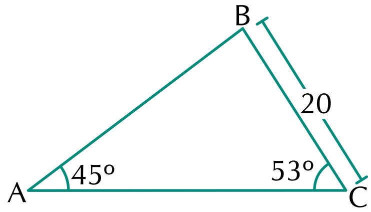
8. Si el área de la región del paralelogramo ABCD es 112 m^2, calcule "h".



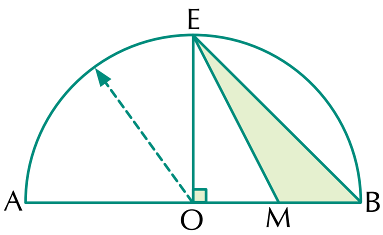
9. En el trapecio de área 28 cm^2, calcule "h".



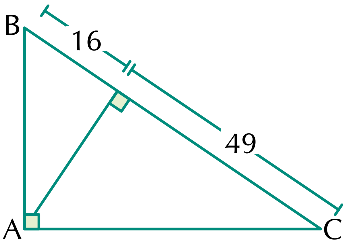
10. Calcule el área de la región triangular ABC.



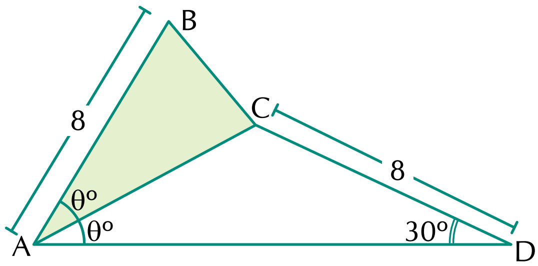
11. En el gráfico: OM = MB = 4 cm. Calcule el área de la región triangular EMB.



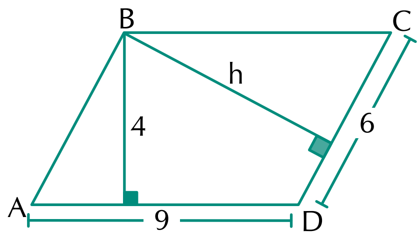
12. En el gráfico, calcule el área del triángulo ABC.



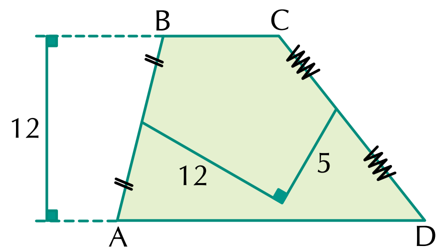
13. En la figura: AB = CD = 8 cm, calcule el área sombreada.



14. En el gráfico, calcule "h", si ABCD es un romboide.



15. Calcule el área de la región del trapecio ABCD.



Repaso

En este capítulo aprenderemos:

- A repasar y acentuar los conceptos ya estudiados.
- A reconocer los diferentes tipos de problemas.

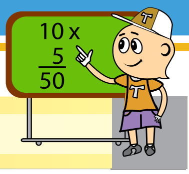
Estadio de fútbol

El antecedente primero de este estadio se encuentra en el llamado "Stadio dei Cipressi" (en español: 'Estadio de los Cipreses') fue proyectado y construido en el marco del proyecto de creación de una auténtica ciudad de los deportes que se llamaría "Foro Mussolini" (y que después de la guerra se rebautizó como "Foro Itálico"). Trabajos que comenzaron en el año 1928 y que terminaron en el año 1937 bajo la supervisión del arquitecto Luigi Walter Moretti.

En diciembre del año 1950 fueron abiertas las canteras para la reconstrucción del Estadio Olímpico para adaptarlo a la capacidad de cien mil personas (por este motivo "Stadio dei Centomila", como era llamado hasta el año 1960) con miras a los XVII olimpíadas. El estadio fue inaugurado el 17 de mayo de 1953 con el partido entre las selecciones nacionales de fútbol de Italia y Hungría.

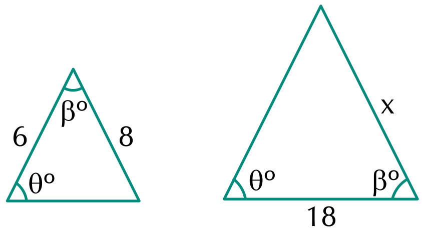
Durante las olimpiadas de 1960, el estadio fue sede de las ceremonias de apertura y clausura y de las competiciones atléticas.

Para ser sede del mundial de fútbol de 1990, el Olímpico fue íntegramente demolido y reconstruido en hormigón armado; las curvas fueron aproximadas al campo en nueve metros. Las arquibancadas fueron integralmente protegidas por una cubierta blanca en estilo árabe y fueron colocados asientos de plástico azul y dos nuevos telones. Al finalizar los trabajos, la capacidad oficial era de 72 698 espectadores.

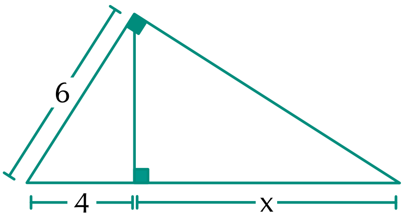


Aplica lo comprendido

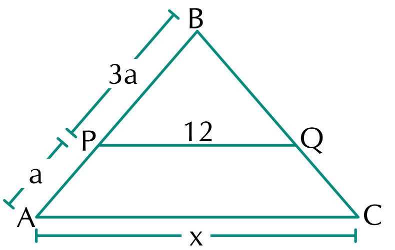
1. De la figura, calcule "x".



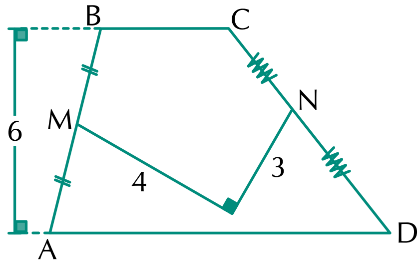
2. Calcule "x" en la figura.



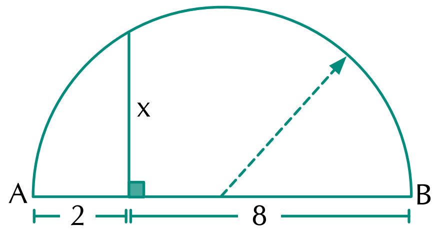
3. En la figura, si: $\overline{PQ} // \overline{AC}$, calcule "x".

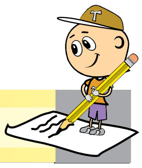


4. Calcule el área de la región del trapecio ABCD.



5. En la figura, calcule "x", si $\overline{AB}$ es diámetro de la semicircunferencia.

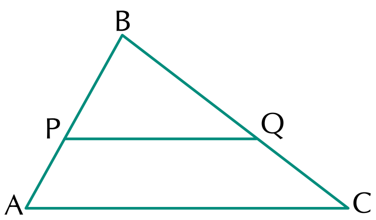




Aprende más...

Comunicación matemática

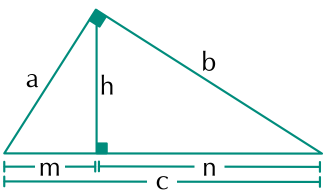
1. Si: $\overline{PQ} // \overline{AC}$, completar lo que falta:



Entonces: Δ .... ∼ Δ ....

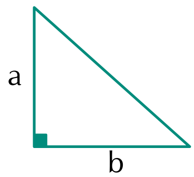
Se cumple: $\dfrac{AC}{PQ} = \dfrac{BC}{\boxed{}}$

2. Según el gráfico, indicar si es verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

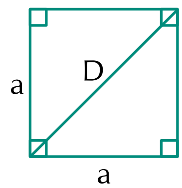


- $a^2 = m \, . \, c$ .... (   )
- $h^2 = a \, . \, b$ .... (   )
- $b^2 = a^2 + c^2$ .... (   )
- $a \, . \, c = b \, . \, h$ .... (   )

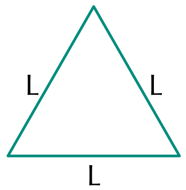
3. Completa las fórmulas de área (A) de acuerdo a cada gráfico:



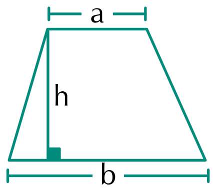
$A = \dfrac{(\quad)(\quad)}{2}$



$A = \dfrac{\qquad}{2}$

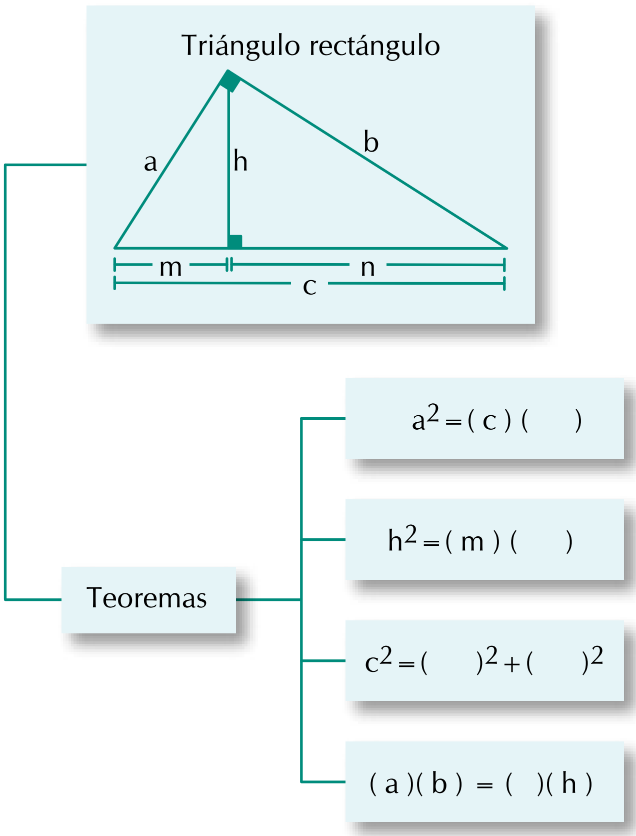


$A = \frac{(\quad)(\quad)}{4}$



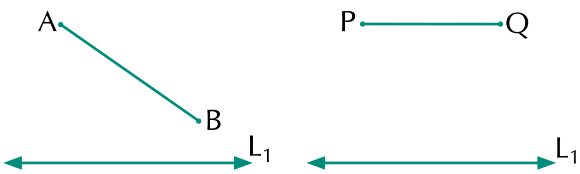
$A = \left(\frac{\qquad}{2}\right)(h)$

4. Completa el mapa conceptual mostrado.



5. Grafica haciendo uso de la regla.

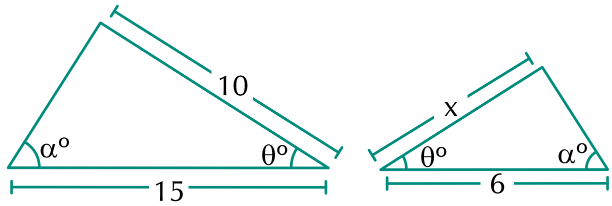
- En cada caso, grafica la proyección ortogonal sobre la recta $\overleftrightarrow{L_1}$.



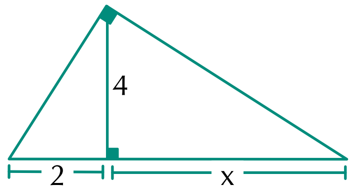
- Grafica el triángulo rectángulo ABC (recto en "B") luego traza la ceviana $\overline{BM}$, tal que: m∢ABM = 18° y sombrea el triángulo BMC.

Resolución de problemas

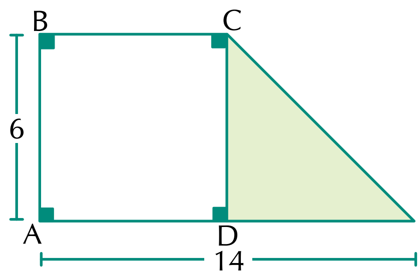
6. En el gráfico, calcule "x".



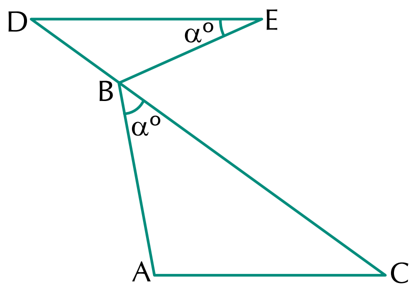
7. En la figura, calcule "x".



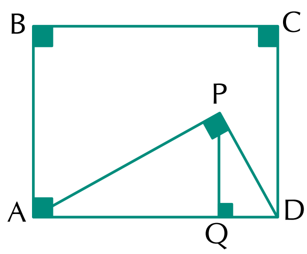
8. Siendo ABCD un cuadrado, calcule el área de la región sombreada.



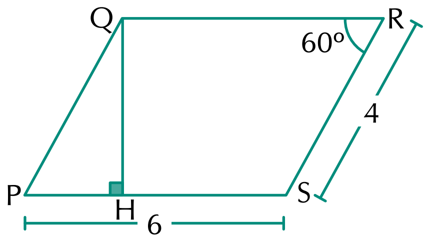
9. En la figura: $\overline{DE} // \overline{AC}$. Si: 3(BE) = 2(AB) y DE = 8 cm, calcule "BC".



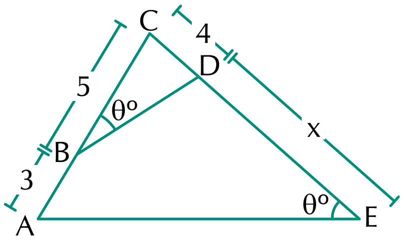
10. En la figura, PQ = 6 cm y QD = 4 cm. Calcule el área del rectángulo ABCD, si: AB = 10 cm.



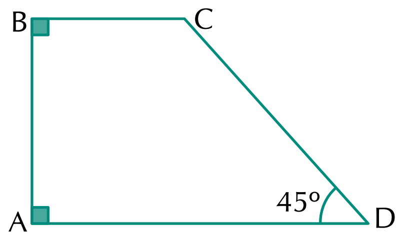
11. En la figura, PQRS es un romboide. Calcule su área.



12. Según el gráfico, calcule "x".



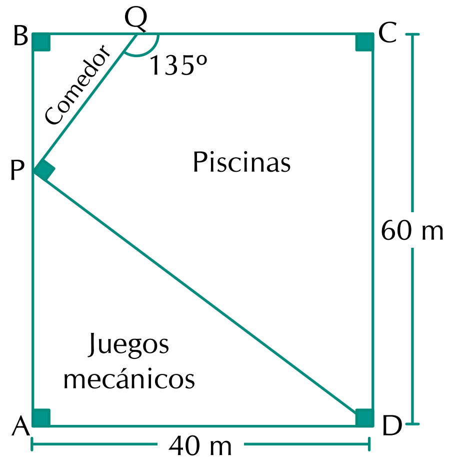
13. En la figura: BC = 3 cm y AD = 7 cm. Calcular el área de la región del trapecio rectángulo mostrado.



Aplicación cotidiana

Centro de recreaciones

El colegio Trilce ha comprado un terreno de forma rectangular en el lugar más distinguido y tranquilo de Chosica con la finalidad de que sus profesores tomen un descanso los fines de semana. El gráfico muestra las partes y la distribución del terreno

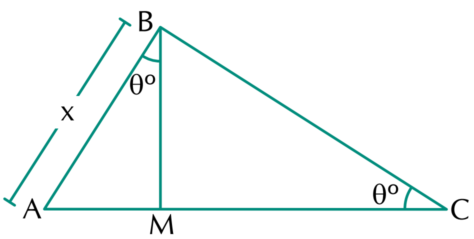


14. Con la información del gráfico adjunto, se pide calcular:
    a) El área que ocupa el comedor.
    b) El área que ocupa los juegos mecánicos.
    c) El área que ocupa las piscinas.

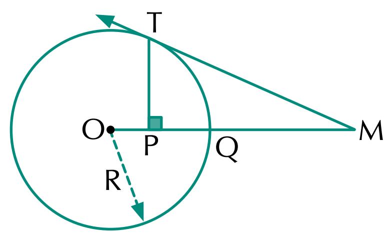
15. Si al comedor le desean colocar piso de mármol cuyo costo por m^2 es \$120, ¿cuál será la inversión realizada por dicho trabajo?

¡Tú puedes!

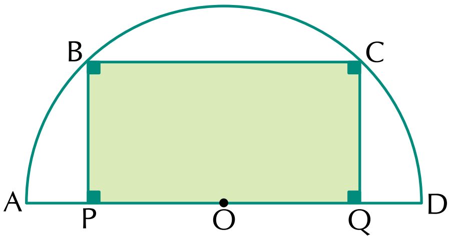
1. En la figura, calcule "x", si: AM = 1 cm y MC = 15 cm.



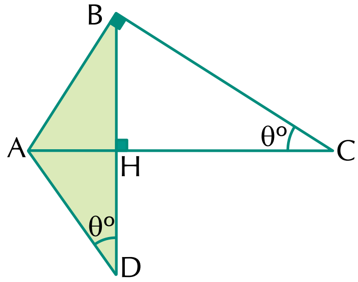
2. En la figura, "T" es punto de tangencia. Si: PQ = 2 cm y QM = 3 cm, calcule "R".



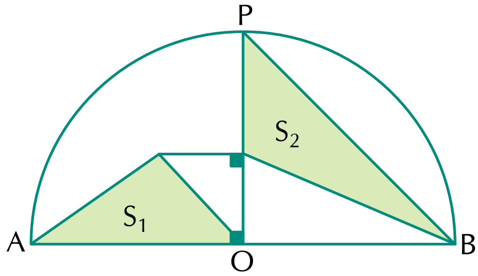
3. En la figura: AP = 1 cm y BC = 8 cm. Calcule el área de la región sombreada, si "O" es el centro de la semicircunferencia.



4. En la figura: AH = 2 cm y HC = 8 cm. Calcule el área sombreada ABD.

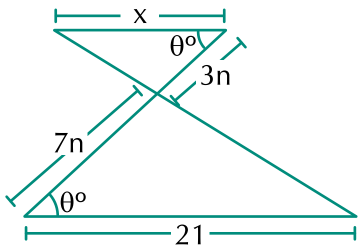


5. Según la figura, calcule "$S_1 + S_2$", si "O" es el centro de la semicircunferencia y AB = 18 cm.

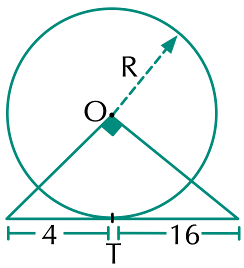


Practica en casa

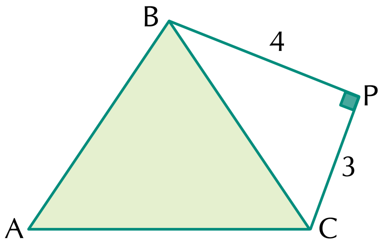
1. Del gráfico, calcule "x".



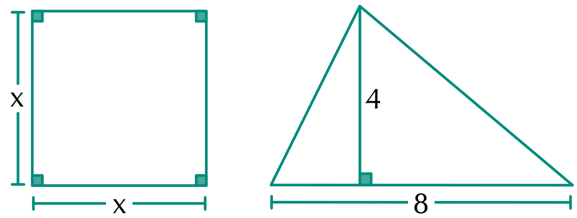
2. Calcule "R", si "T" es punto de tangencia.



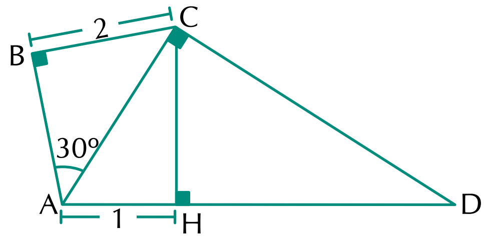
3. Calcule el área del triángulo equilátero ABC.



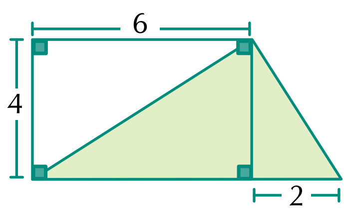
4. Si las dos figuras presentan áreas iguales, calcule "x".



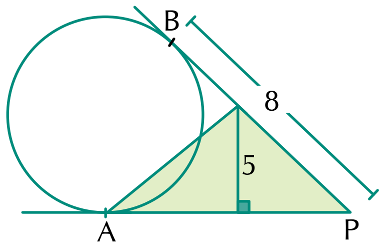
5. En la figura, calcule "HD".



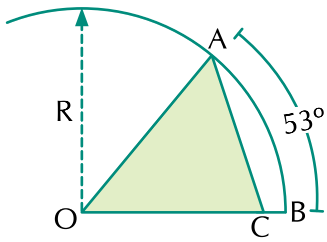
6. Calcule el área del triángulo sombreado.



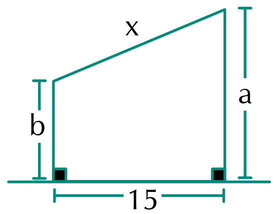
7. En la figura, "A" y "B" son puntos de tangencia. Calcule el área sombreada.



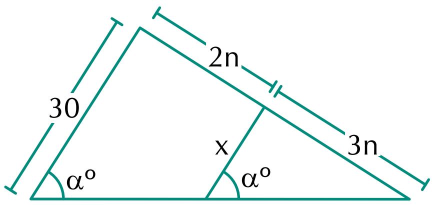
8. En la figura, "O" es centro. Calcule el área del triángulo OAC, si: CB = 2 y R = 10.



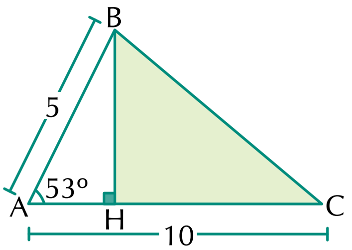
9. Del gráfico, calcule "x", si: a–b = 8.



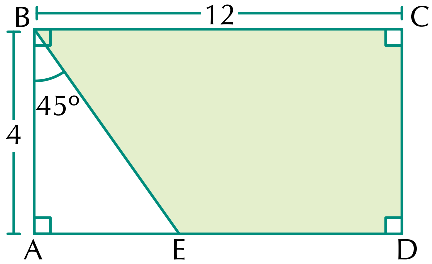
10. Del gráfico, calcule "x".



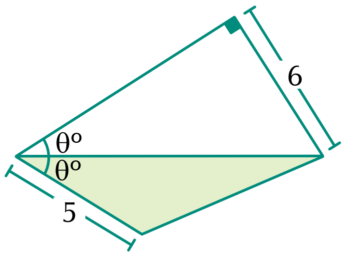
11. Calcule el área del triángulo BHC.



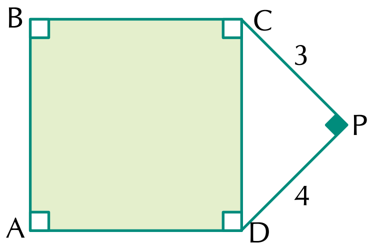
12. Del gráfico, calcule el área sombreada.



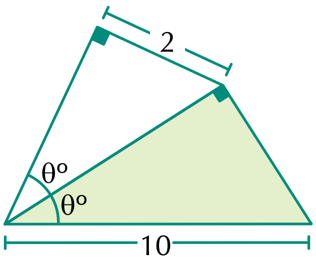
13. Calcule el área del triángulo sombreado.



14. Calcule el área del cuadrado ABCD.



15. Calcule el área de la región sombreada.



Áreas de regiones circulares

En este capítulo aprenderemos:

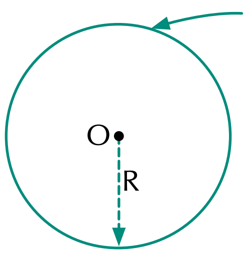
- A reconocer la diferencia entre círculo y circunferencia.
- A conocer los conceptos de círculo y sector circular.
- Aplicar las fórmulas del cálculo del área del círculo y del sector circular.
- A desarrollar diversos problemas sobre el cálculo de regiones circulares.

Jardines de Versalles

El Palacio de Versalles (en francés: Château de Versailles, castillo, mansión de Versailles) es un edificio que desempeñó las funciones de una residencia real en siglos pasados. El palacio está ubicado en el municipio de Versalles, en Île-de-France. Su construcción fue ordenada por Luis XIV.
El inversadeno es una construcción en la cual podemos observar que está basada en formas circulares y hay hasta una corona circular, la cual es el centro de esta bella construcción.

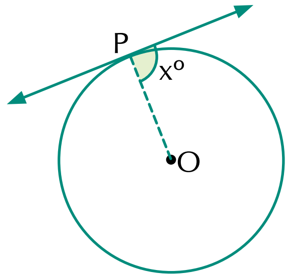
Saberes previos

- **La circunferencia**



"O": Centro

- **Propiedad de la circunferencia**

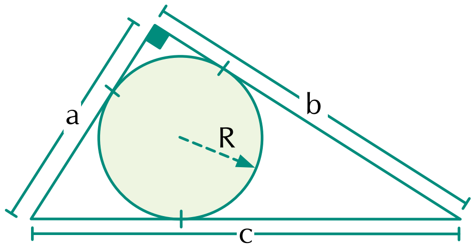


"P": punto de tangencia

$x^\circ = 90^\circ$

$\overline{OP}$: radio

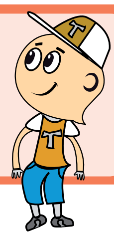
- **Teorema de Poncelet**



$a + b = c + 2R$

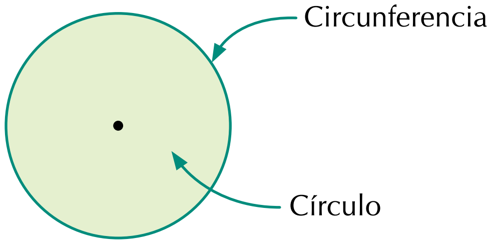
Recuerda que...

π: Es un número irracional cuyo valor aproximado es 3,1416

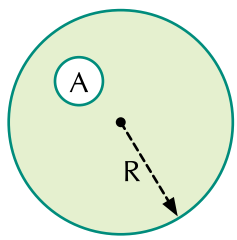


Conceptos básicos

- **Círculo:** Es una porción de plano, cuyo contorno o perímetro es una circunferencia.



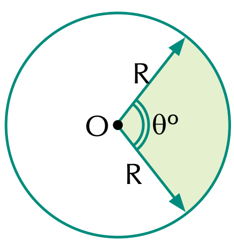
- **Área del círculo (A)**



$A = \pi.R^2$

En el gráfico:
"R": radio

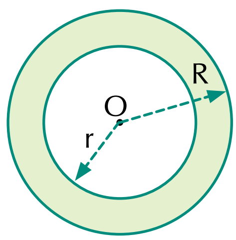
- **Área de un sector circular (A)**



$$A = \frac{\pi R^2.\theta^\circ}{360^\circ}$$

En el gráfico:
"R": radio
"θ": medida del ángulo central en grados sexagesimales.

- **Área de una corona circular (A)**



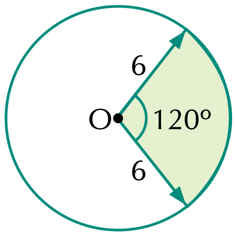
$A = \pi(R^2 - r^2)$

En el gráfico:
"R": radio de la circunferencia mayor.
"r": radio de la circunferencia menor.
"O": centro.

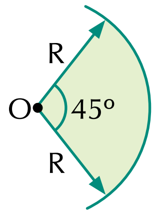
Aplica lo comprendido

1.

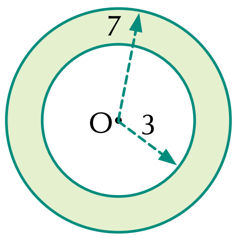
- Calcule el área del sector circular ("O": centro)



- En el sector circular mostrado, de área 2π, calcule "R" ("O": centro)

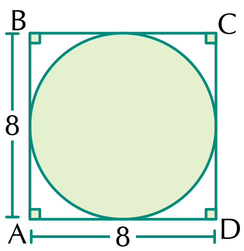


2. Calcule el área de la corona circular mostrada.

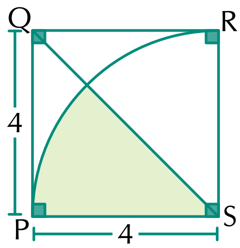


3.

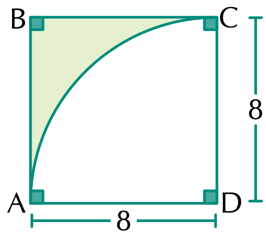
- En la figura, calcule el área del círculo, si ABCD es un cuadrado.



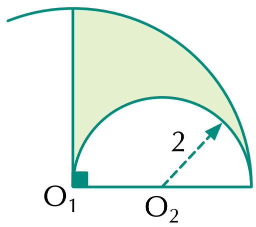
- Calcule el área de la región sombreada, si: PQRS es un cuadrado. ("S": centro).



4. Calcule el área de la región sombreada. ("D": centro)



5. Calcule el área de la región sombreada ("O_1" y "O_2" son centros)



Aprende más...

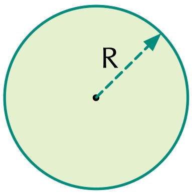
Comunicación matemática

1. Graficar correctamente:

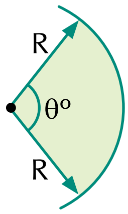
- Un sector circular cuyo ángulo central es 120º y radio 4 cm.

- Una corona circular de centro "O" cuyo radio mayor sea 9 cm y su radio menor 2 cm.

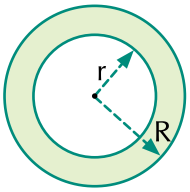
2. Relaciona con líneas, qué formula le corresponde a cada gráfico.



• • $\pi(R^2 - r^2)$



• • πR^2

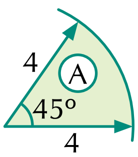


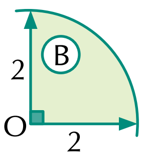
• • $\dfrac{\pi R^2 \theta^o}{360^o}$

3. Indicar si es verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

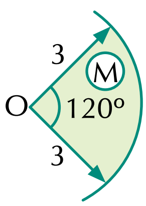
- El círculo y la circunferencia tienen la misma definición ....( )
- El área de un sector circular depende del radio y del ángulo central ....( )
- El área de un círculo es $2\pi R$ ....( )
- El sector circular es parte del círculo ......( )

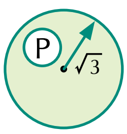
4. Calcule el área de cada gráfico y luego compara indicando cual es mayor ó si son iguales (">"; "<" o "=").





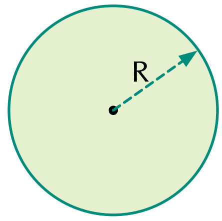
A ☐ B



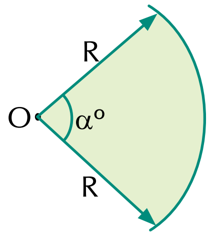


M ☐ P

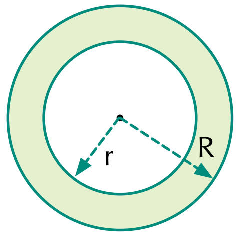
5. Completa las fórmulas de acuerdo al gráfico. (A = área)



$A = \pi(\quad)^2$



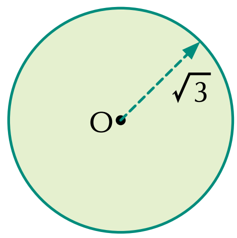
$A = \dfrac{\neq(\quad)^2(\quad)}{(\quad)}$



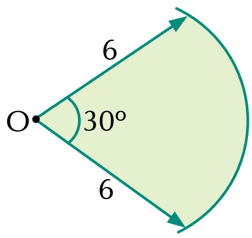
$A = \pi(R^2 - \qquad)$

Resolución de problemas

6. Calcule el área (A) en cada caso:

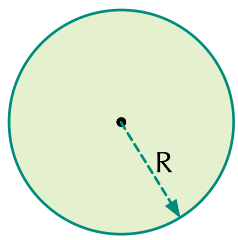


A =

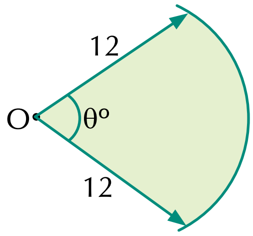


A =

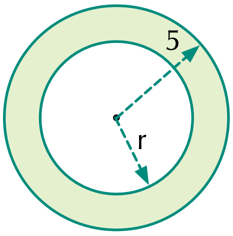
7. Calcule el radio (R) del círculo mostrado, si su área es 289π.



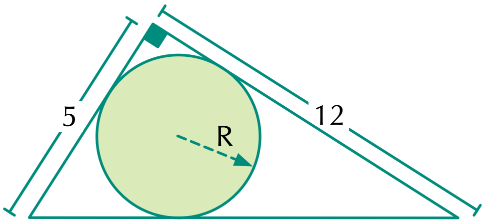
8. Calcule el ángulo central "θ°" del sector circular mostrado, si su área es 12π.



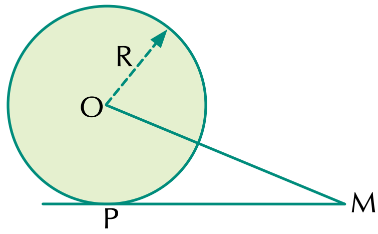
9. Calcule "r", si el área de la corona circular es 9π.



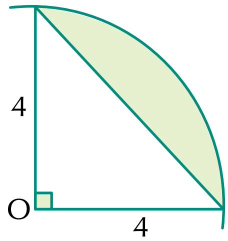
10. Calcule el área del círculo inscrito en el triángulo rectángulo.



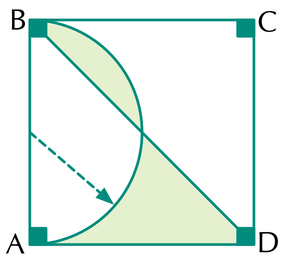
11. Calcule el área del círculo mostrado, si: "O" es centro, OM = 10 cm y PM = 8 cm.



12. En la figura, calcule el área de la región sombreada, si "O" es centro.



13. Si ABCD es un cuadrado cuyo lado es 4 cm, calcule el área de la región sombreada.



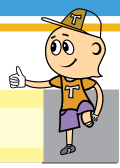
Aplicación cotidiana

El limpia parabrisas

La figura muestra el parabrisas del auto de Rubén. El sistema está compuesto por un eje rotatorio, por una plumilla de 30 cm y por un soporte metálico de 20 cm. Al encender el sistema el ángulo de giro ("θ°") recorre un ángulo de 120° (como lo muestra la figura).

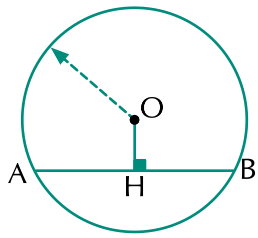
14. Calcule el área barrida por el soporte metálico.

15. Calcule el área del parabrisas que es limpiado.

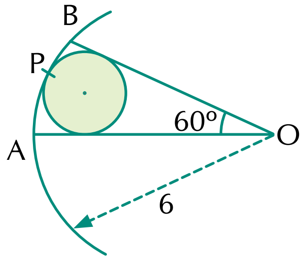


¡Tú puedes!

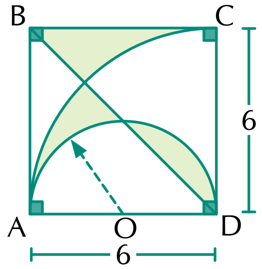
1. En la figura, calcule el área del círculo mostrado, si: AB = 24 cm y OH = 5 cm.



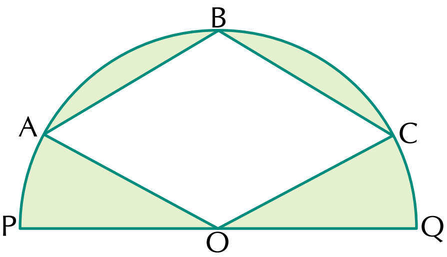
2. En la figura, calcule el área del círculo sombreado, si "O" es centro y "P" es punto de tangencia.



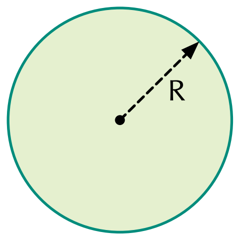
3. En el gráfico, ABCD es un cuadrado ("O" y "D" son centros). Calcule el área de la región sombreada.



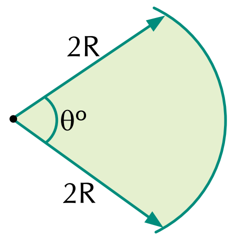
4. Calcule el área de la región sombreada, si ABCO es un rombo y $\overline{PQ}$ es diámetro de 8 cm de longitud. ("O" es centro).



5. ¿Cuánto debe medir "θº", para que el área de la región "A" sea el doble del área de la región "B"?



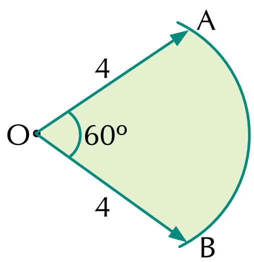
Región "A"



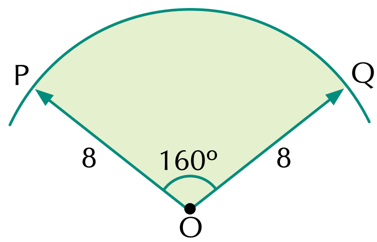
Región "B"

Practica en casa

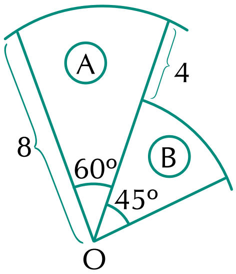
1. Calcule el área del sector circular AOB.



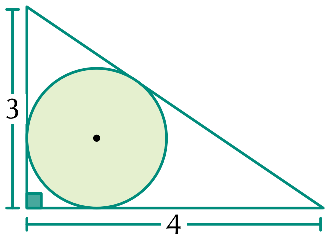
2. Calcule el área del sector circular POQ.



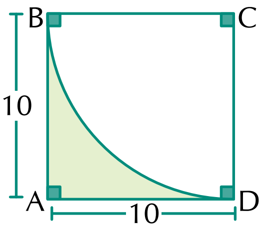
3. Calcule "$\frac{A}{B}$", si "O" es centro. ("A" y "B" son las áreas de los sectores circulares)



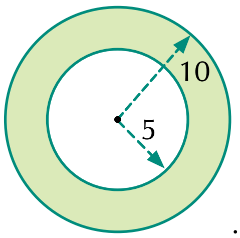
4. Calcule el área del círculo sombreado.



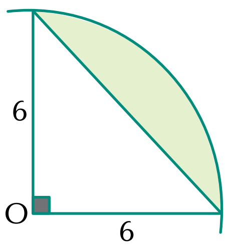
5. Calcule el área de la región sombreada. ("C": es centro)



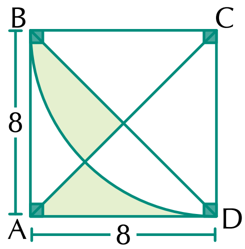
6. Calcule el área de la corona circular mostrada.



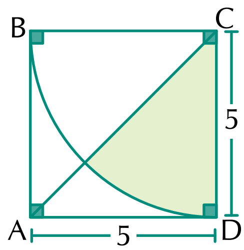
7. Calcule el área de la región sombreada, si "O" es centro.



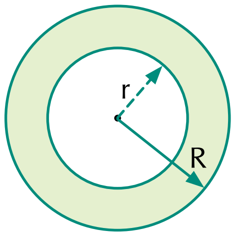
8. Calcule el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado. ("C": centro)



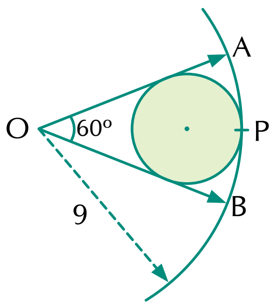
9. Calcule el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado. ("C": centro).



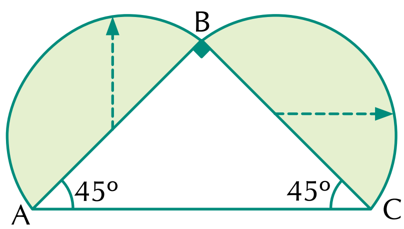
10. Si: $R^2 - r^2 = 10$, calcule el área de la corona circular.



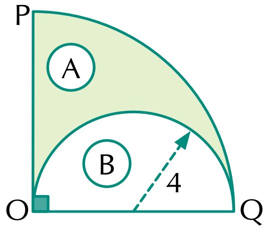
11. Calcule el área del círculo sombreado, si "O" es centro del sector AOB y "P" es el punto de tangencia.



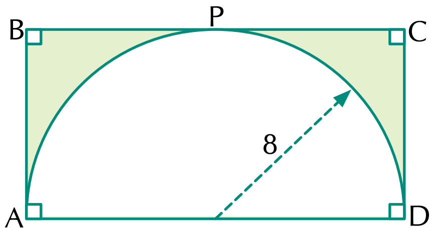
12. Calcule el área de la región sombreada, si: $AC = 4\sqrt{2}$.



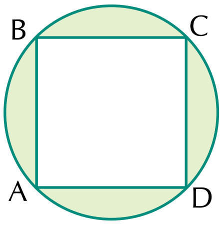
13. Calcule: $\frac{A}{B}$. ("A" y "B": áreas y "O": centro)



14. Calcule el área de la región sombreada ("P" es punto de tangencia).



15. Calcule el área de la región sombreada, si ABCD es un cuadrado inscrito en la circunferencia. Además: $AC = 4$ m.



UNIDAD 7

SÓLIDOS PLATÓNICOS

Las propiedades de estos poliedros son conocidas desde la antigüedad clásica, hay referencias a unas Bolas Neolíticas de piedra labradas, encontradas en Escocia 1000 años antes de que Platón hiciera una descripción detallada de los mismos en "Los elementos de Euclides". Se les llegó a atribuir incluso propiedades mágicas o mitológicas. Timeo de Locri, en el diálogo de Platón dice "El fuego está formado por tetraedros; el aire, de octaedros; el agua, de icosaedros; la tierra de cubos; y como aún es posible una quinta forma, Dios ha utilizado ésta, en el dodecaedro pentagonal, para que sirva de límite al mundo". Los antiguos griegos estudiaron los sólidos platónicos a fondo y fuentes (como Proclo) atribuyen a Pitágoras su descubrimiento. Otra evidencia sugiere que solo estaban familiarizados con el tetraedro, el cubo y el dodecaedro, y que el descubrimiento del octaedro y el icosaedro pertenecen a Teeteto, un matemático griego contemporáneo de Platón. En cualquier caso, Teeteto dio la descripción matemática de los cinco poliedros y es posible que fuera el responsable de la primera demostración de que no existen otros poliedros regulares convexos.

- ¿Cuántos sólidos geométricos observas?

APRENDIZAJES ESPERADOS

Aprendizajes esperados

Comunicación matemática

- Definir los sólidos geométricos.
- Reconocer los elementos de cada poliedro.

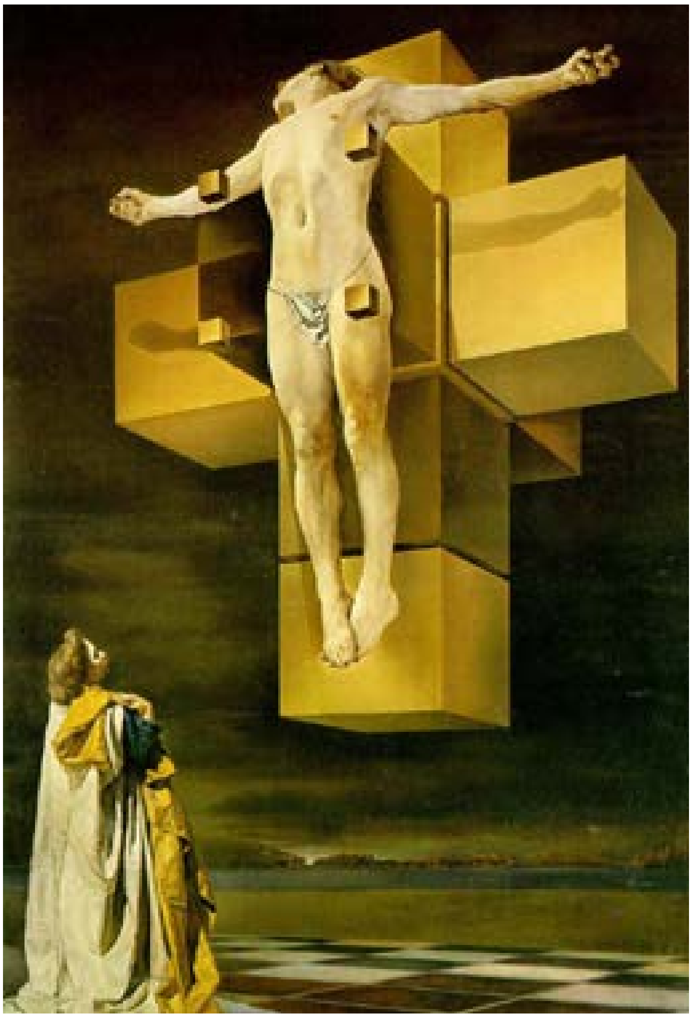
Resolución de problemas

- Analiza los datos disponibles y las relaciones con las propiedades de sólidos geométricos.
- Relaciona adecuadamente los datos numéricos y gráficos.

Sólidos geométricos

En este capítulo aprenderemos:

- A conocer y diferenciar los sólidos geométricos que se van a estudiar como el tetraedro regular, el hexaedro regular y el octaedro regular.
- A reconocer los elementos de cada sólido geométrico.
- A aplicar las fórmulas del cálculo de su superficie y de su volumen.



Obra de Dalí

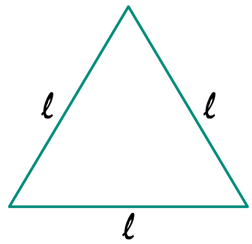
Salvador Dalí , pintor español. Tras una infancia transcurrida en la costa mediterránea, Dalí estudió concienzudamente la rutina académica en una academia de bellas artes en Madrid con un profesor que había enseñado también a Picasso.

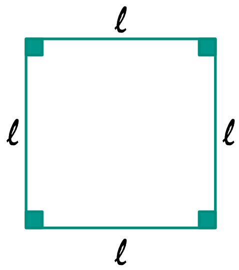
Pronto empezó a leer a Freud y a empaparse de filosofía. Por las revistas de arte supo del cubismo y el futurismo. Tras un corto período en el que intentó reconciliar el cubismo con la técnica de los viejos maestros, Salvador Dalí creó su propio mundo imaginario: perspectivas lejanas de paisajes marinos, claros y luminosos, con un primer plano en el que aparecían elementos tan poco relacionados entre sí como remedos de despojos anatómicos y aparatos mecánicos pero también en sus obras usaba muchas figuras geométricas, entre ellas los Poliedros Regulares a los cuales los consideraba perfectos.

- Obra de Salvador Dalí – Crucifixión (1954). En la fotografía, ¿puedes observar algún sólido geométrico?

Saberes previos

- **Polígonos regulares**

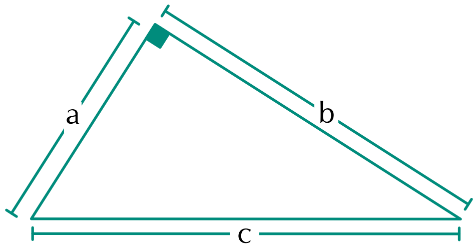




$$\text{Área} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

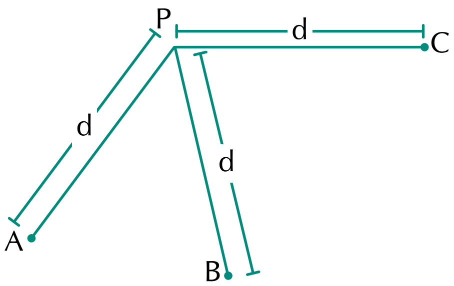
$$\text{Área} = \ell^2$$

- **Teorema de Pitágoras**



$$c^2 = a^2 + b^2$$

- **Punto equidistante**

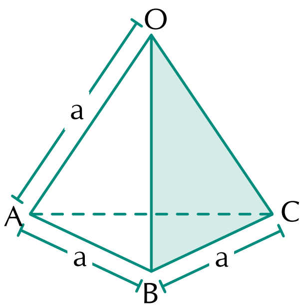


"P" equidista de "A"; "B" y "C"

Conceptos básicos

Tetraedro regular

Es aquel poliedro regular limitado por cuatro regiones triangulares equiláteras.



Área total de la superficie (A)

$$A = a^2\sqrt{3}$$

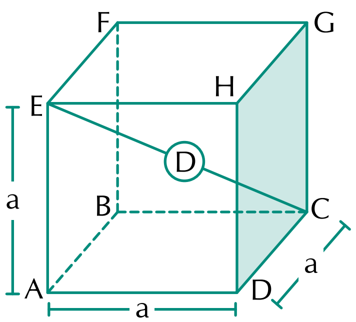
Volumen (V)

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

En el gráfico:
"a": longitud de la arista.

Hexaedro regular o cubo

Es aquel poliedro regular limitado por seis regiones cuadradas.



Área total de la superficie (A)

$$A = 6a^2$$

Volumen (V)

$$V = a^3$$

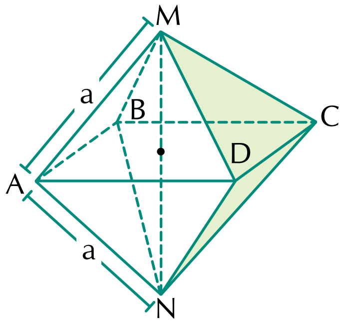
Diagonal del cubo (D)

$$D = a\sqrt{3}$$

En el gráfico:
"a": longitud de la arista.

Octaedro regular

Es aquel poliedro regular limitado por ocho regiones triangulares equiláteras.



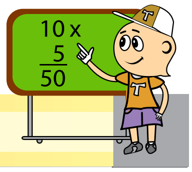
Área total de la superficie (A)

$$A = 2a^2\sqrt{3}$$

Volumen (V)

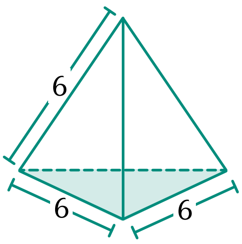
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

En el gráfico:
"a": longitud de la arista.

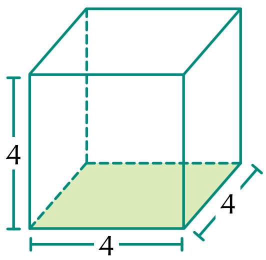


Aplica lo comprendido

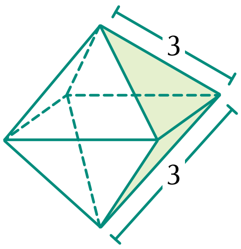
1. En el tetraedro regular mostrado, calcule el área total y el volumen del sólido.



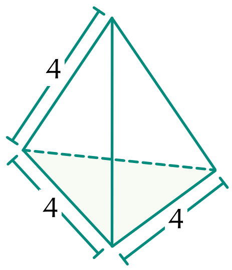
2.
- En el hexaedro regular mostrado, calcule el área total y el volumen del sólido.



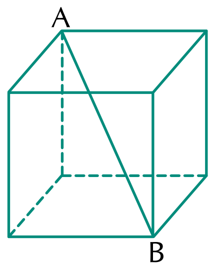
- En el octaedro regular mostrado, calcule el volumen y el área total del sólido.



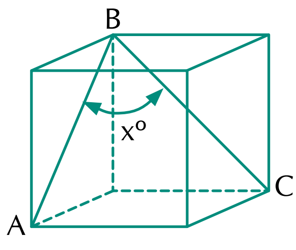
3. Calcule el volumen del tetraedro regular mostrado.



4. Calcule el área total del cubo mostrado, si su diagonal $\overline{AB}$ mide $6\sqrt{3}$ cm.



5. En la figura, calcule "x", si el sólido mostrado es un cubo.

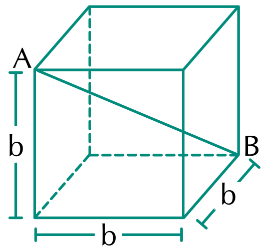


Comunicación matemática

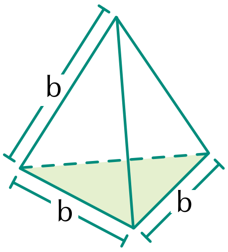
1. Graficar haciendo uso de la regla.
    - Un tetraedro regular.
    - Un hexaedro regular.
    - Un octaedro regular.

2. Indicar si es verdadero (V) o falso (F), según corresponda.
    - El hexaedro regular también es conocido como cubo ....( )
    - El octaedro regular presenta seis caras ....( )
    - El tetraedro regular presenta seis aristas ....( )
    - Las caras del octaedro regular y del tetraedro regular con cuadrados ..( )

3. Completa la relación de acuerdo al gráfico mostrado.



$AB = (\quad)\sqrt{3}$

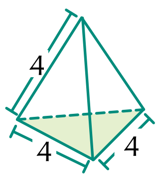


V: volumen

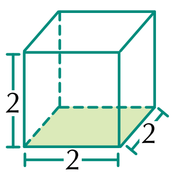
A: área

$V = \dfrac{(\quad)^3\sqrt{2}}{(\quad)}$ $A = (\quad)^2\sqrt{3}$

4. Calcule el volumen de cada gráfico y luego compara indicando cual es ">"; "<" ó "=".



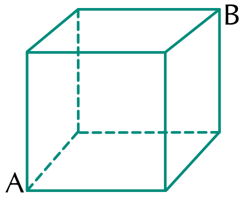
Volumen "V_1"



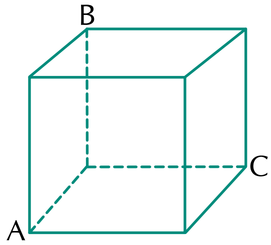
Volumen "V_2"

V_1 $\square$ V_2

5.
    - Traza la diagonal $\overline{AB}$.

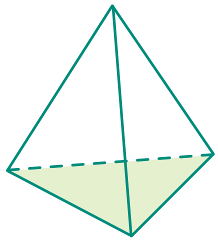


    - Traza $\overline{AB}$; $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, luego sombrea la figura resultante.

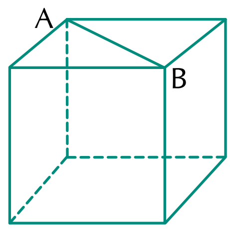


Resolución de problemas

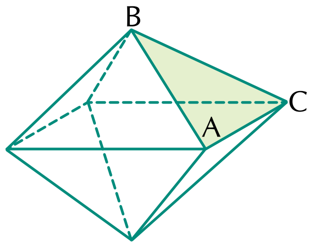
6. Calcule el volumen del tetraedro regular mostrado, si la suma de sus aristas es 18 cm.



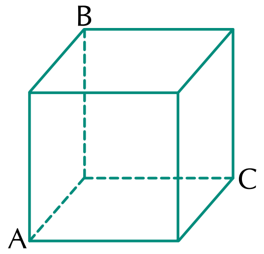
7. Calcule el volumen del hexaedro regular mostrado, si: $AB = 8\sqrt{2}$ cm.



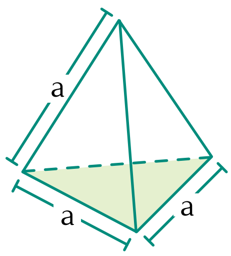
8. Calcule el volumen del octaedro regular mostrado, si el área de la cara ABC es $16\sqrt{3}$ cm^2.



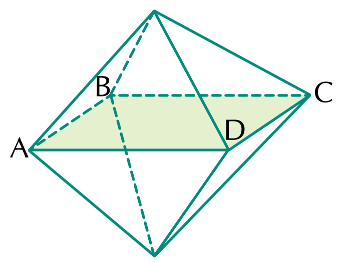
9. En el cubo mostrado, cuya arista mide 2 cm, calcule el perímetro del triángulo que se forma al unir los puntos "A"; "B" y "C".



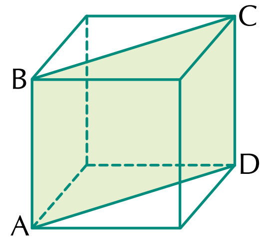
10. En el tetraedro regular mostrado, de volumen $18\sqrt{2}$ cm^3, calcule la longitud de su arista "a".



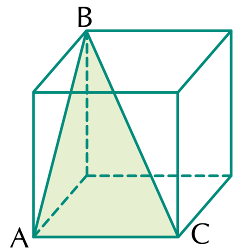
11. En el octaedro regular mostrado, el perímetro de la figura ABCD es 24 cm. Calcule el área total del sólido mostrado.



12. En el cubo mostrado, calcule el área de la región sombreada ABCD, si la arista del cubo mide 10 cm.



13. Calcule el área de la región sombreada ABC, si la arista del cubo mide 7 cm.



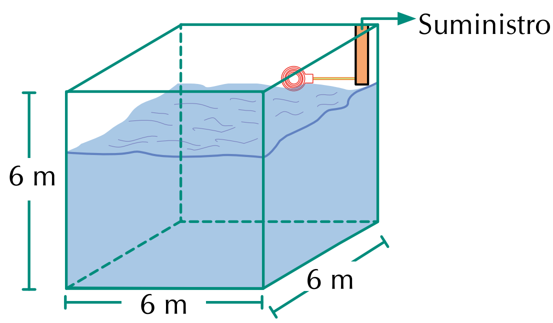
Aplicación cotidiana

El tanque

En un edificio existe un tanque en forma de hexaedro regular cuya arista mide 6 m. Si el tanque es llenado hasta su máxima capacidad por día y en cada departamento, una persona consume 18 m^3 por día, calcule:

14. La máxima capacidad del tanque (en m^3)

15. El número de personas que hay en el edificio.



¡Tú puedes!

1. Calcule el volumen de un tetraedro regular, sabiendo que el área total es $100\sqrt{3}$ m^2.

2. A partir de un triángulo equilátero de $36\sqrt{3}$ m^2 de área, se construye un tetraedro regular. Calcule el volumen de dicho tetraedro.

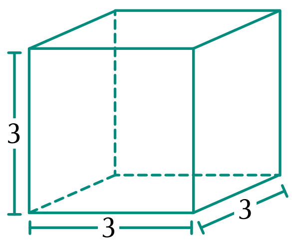
3. Si un cubo y un tetraedro regular tienen igual volumen, calcule la relación entre las longitudes de las aristas del cubo y del tetraedro regular.

4. Calcule la distancia entre los baricentros de dos caras contiguas de un tetraedro regular, de 12 m de arista.

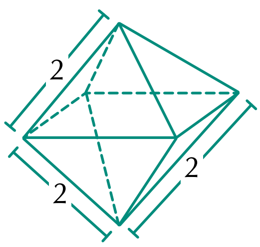
5. Calcule la razón entre las áreas totales de un cubo y un octaedro regular, que tiene como vértices los puntos centrales de las caras del cubo.

Practica en casa

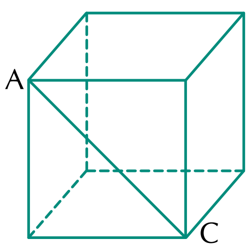
1. Calcule el área total del hexaedro regular mostrado.



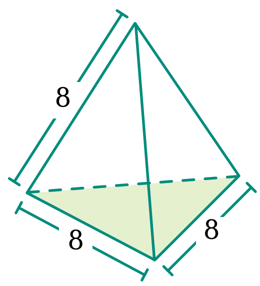
2. Calcule el área total del octaedro regular mostrado.



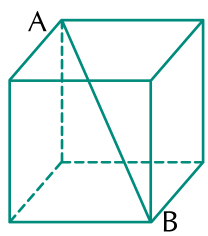
3. Calcule el volumen del cubo mostrado, si: $AC = 8\sqrt{2}$ cm.



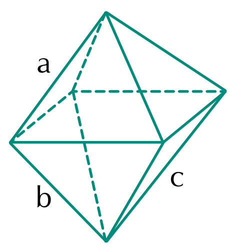
4. Calcule el área total del tetraedro regular mostrado.



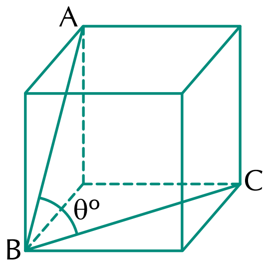
5. Si: $AB = 4\sqrt{3}$, calcule el área total del cubo mostrado.



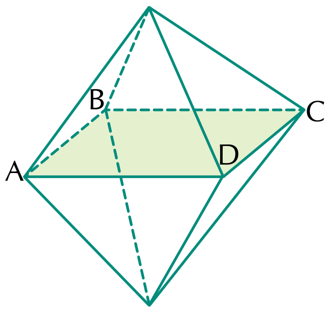
6. Calcule el volumen del octaedro regular mostrado, si: $a + b + c = 15$ cm.



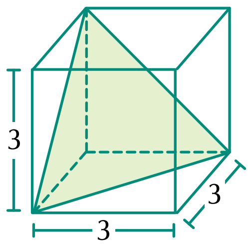
7. Calcule "θ", si el sólido mostrado es un cubo.



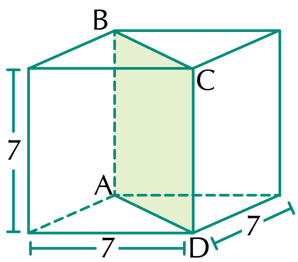
8. Calcule el volumen del octaedro regular mostrado, si el área de la figura ABCD es 64 cm^2.



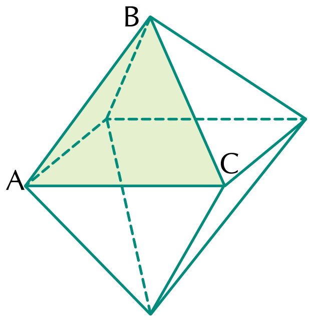
9. Calcule el área del triángulo sombreado, si el sólido es un cubo.



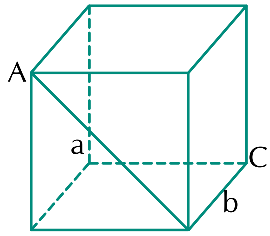
10. Calcule el área del plano ABCD.



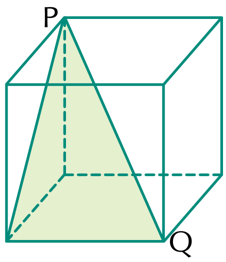
11. Calcule el área total del octaedro regular mostrado, si el área del triángulo ABC es $\sqrt{3}$ cm^2.



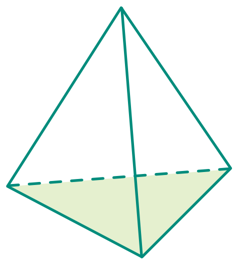
12. En el cubo mostrado: $a^2+b^2=121$, calcule "AC".



13. Si: $PQ=6\sqrt{3}$, calcule el perímetro del triángulo sombreado.



14. Si el área total del tetraedro regular mostrado es $144\sqrt{3}$ cm^2, calcule el volumen del sólido.

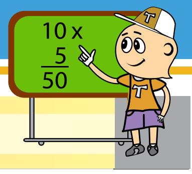


Repaso general

Pirámide de Louvre (Francia)

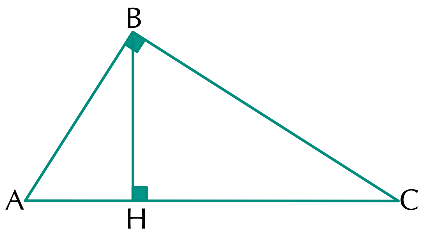
La pirámide del museo del Louvre es una obra situada en el patio del museo del Louvre, en París, que da acceso al edificio. Fue diseñada por el arquitecto Leoh Ming Pei. De estilo internacional, esta pirámide de vidrio y aluminio fue inaugurada en el año de 1989 por el entonces presidente francés, François Mitterrand. Tiene una altura de 21,6 m y un total de 666 como número del diablo (Satanás) paneles de vidrio laminado transparente, divididos en 603 rombos y 63 triángulos. El peso total de la estructura es de 180 toneladas y la inclinación de sus paredes, al igual que ocurre con las pirámides egipcias, es de 51º.
Su centro de gravedad coincide con el de los tres pabellones del museo, Richelieu al norte, Denon al sur y Sully al este. Ésta pirámide es la principal y más grande de las pirámides de cristal del museo, que incluye, a nivel subterráneo, otra pirámide pero invertida. Antes de construirse la pirámide, la entrada al Louvre tenía unas largas colas. Con su construcción, además de solucionarse el problema, se aumenta el espacio de exposición del museo.
Desde su construcción, la pirámide ha estado sujeta a polémicas, debido al contraste de estilos entre la modernidad del vidrio y el clasicismo del museo, si bien ha servido de inspiración para las ampliaciones de muchos otros museos.

- Pirámide del Museo del Louvre - Francia, en la fotografía ¿puedes observar algún sólido geométrico?

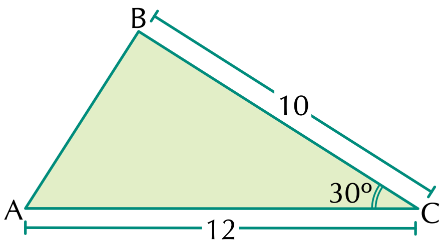


Aplica lo comprendido

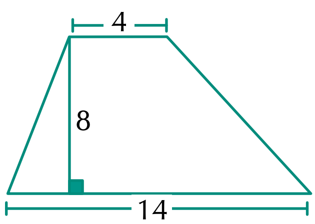
1. En el gráfico: AH = 1 cm y HC = 16 cm, calcule "BH".



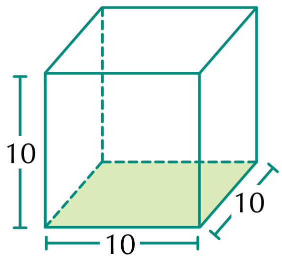
2.
- En la figura, calcule el área de la región sombreada.



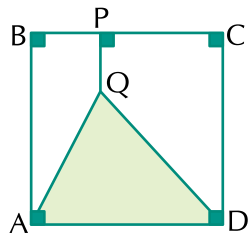
- Calcule el área del trapecio mostrado.



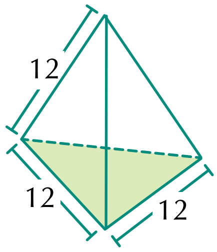
3. Calcule el área total y el volumen del hexaedro regular mostrado.

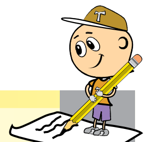


4. Si ABCD es un cuadrado de lado 8 cm y PQ = 2 cm, calcule el área del triángulo sombreado.



5. Calcule el área total del tetraedro regular mostrado.

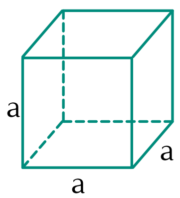




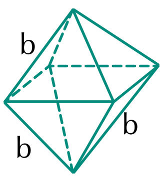
Aprende más...

Comunicación matemática

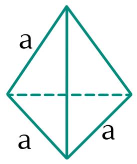
1. Relaciona con líneas



- Octaedro regular

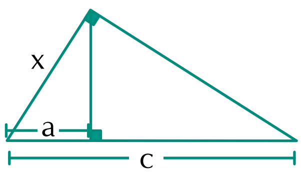


- Hexaedro regular

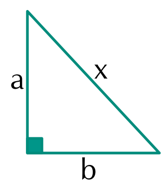


- Tetraedro regular

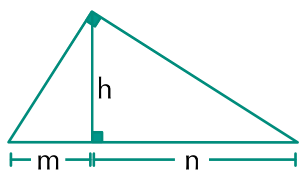
2. Completar:



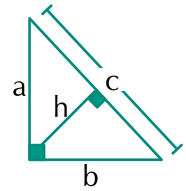
$x^2 = (\quad)(\quad)$



$x^2 = (\quad)^2 + (\quad)^2$



$(\quad)^2 = (m)(\quad)$

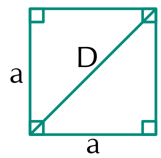


$(a)(\quad) = (h)(\quad)$

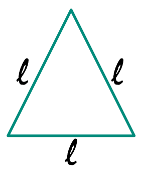
3. Graficar:

- Un sector circular POQ (centro en "O") cuyo radio mide 3 cm y su ángulo central sea 150°
- Un octaedro regular de 4 cm de arista.

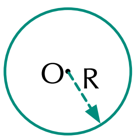
4. Completar la relación ("A": área)



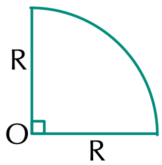
$A = \dfrac{(\quad)^2}{2}$



$A = \dfrac{(\quad)^2\sqrt{3}}{(\quad)}$



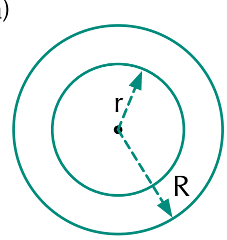
$A = \pi(\quad)^2$



$A = \dfrac{\neq(\quad)^2}{(\quad)}$

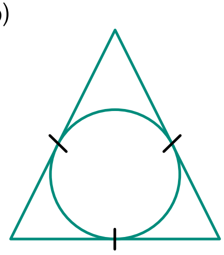
5. Sombrea los gráficos de acuerdo al texto.

a)



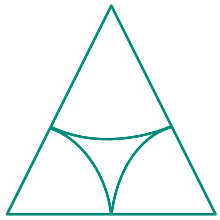
Sombrea la corona circular

b)



Sombrea la región interna al triángulo y externa al círculo

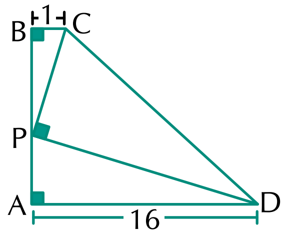
c)



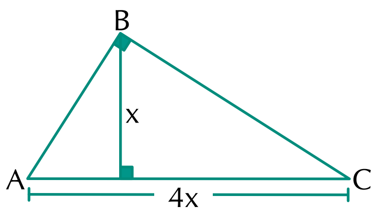
Sombrea el triángulo curvilíneo

Resolución de problemas

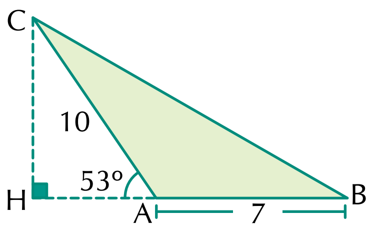
6. Si en la figura: AP = PB, calcule "AB".



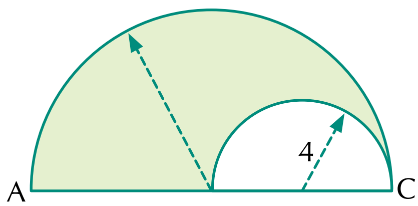
7. Si en la figura: (AB)(BC) = 16 cm^2, calcule "x".



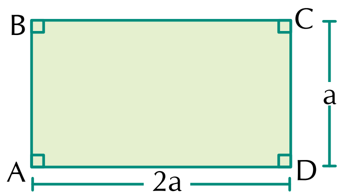
8. En la figura, calcule el área de la región sombreada.



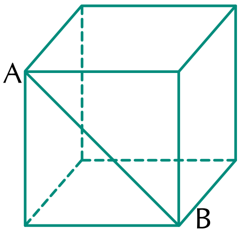
9. En la figura, calcule el área de la región sombreada, si $\overline{AC}$ es diámetro.



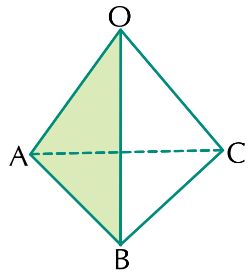
10. Si el área del rectángulo ABCD es 18 cm^2, calcule "AD".



11. En el cubo mostrado: $AB=4\sqrt{2}$, calcule el área total del sólido.

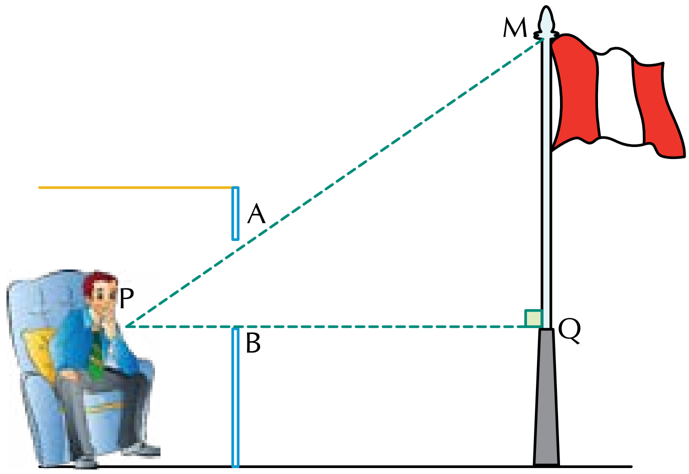


12. En el tetraedro regular mostrado, el área del triángulo AOB es $9\sqrt{3}$ cm^2. Calcule la suma de todas las aristas.



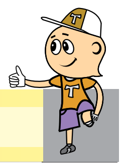
13. En un octaedro regular de arista igual a 4 cm, calcule el volumen del sólido.

Aplicación cotidiana
El asta de la bandera
Un profesor de Trilce en su hora de descanso ve por la ventana de la sala de profesores, el asta de la bandera del colegio y aplicando conceptos básicos de Geometría, se pregunta ¿cuál será el tamaño del asta?



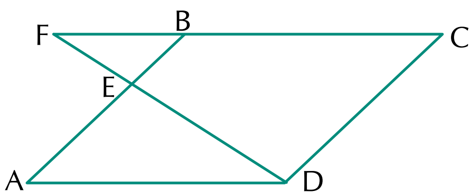
14. Si al medir, la altura de la ventana ($\overline{AB}$) toma una medida de 1,20 m y sabemos que: BQ = 9 (PB), ¿cuál será la altura del asta?

15. Si la altura del asta fuese de 15 m y BQ = 14 (PB), ¿cuál sería la altura de la ventana en estas condiciones?

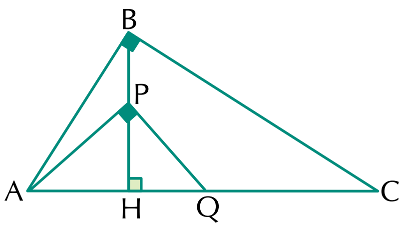


¡Tú puedes!

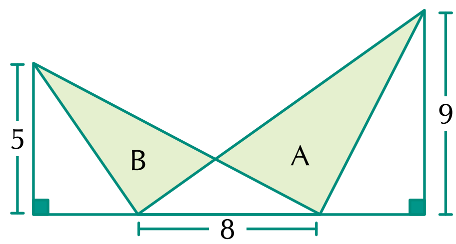
1. Si ABCD es un romboide, calcule "BC", si: AE = 3EB y FC = 24 cm.



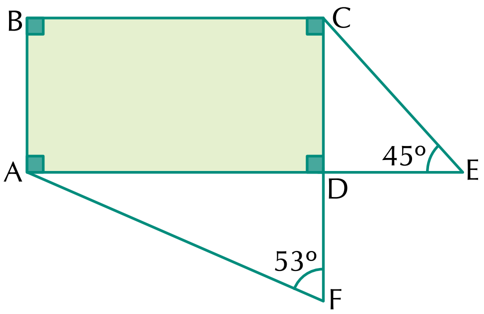
2. En la figura: BP = PH y HQ = 2 cm, calcule "QC".



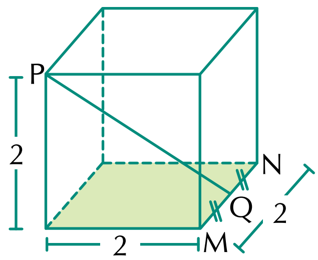
3. Siendo "A" y "B" las áreas de las regiones sombreadas, calcule "A–B".



4. ABCD es un rectángulo. Si: AF = 10 cm y DE = 4 cm, calcule el área de la región sombreada.

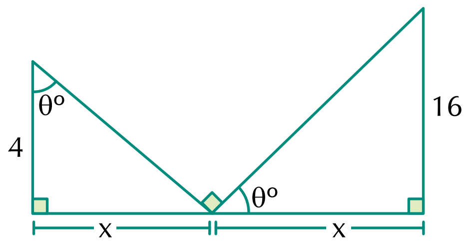


5. En la figura, calcule "PQ", si el sólido mostrado es un hexaedro y "Q" es punto medio de "MN".

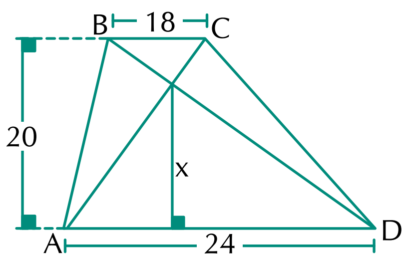


Practica en casa

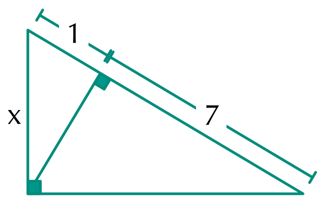
1. Según el gráfico, calcule "x".



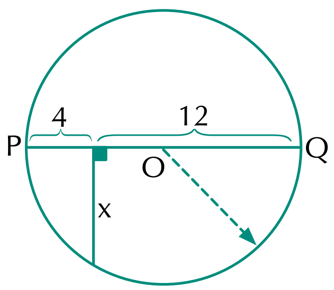
2. En la figura, calcule "x". (ABCD: trapecio)



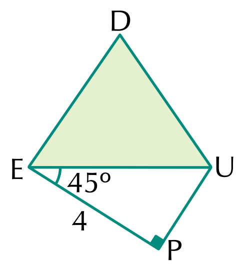
3. Según el gráfico, calcule "x".



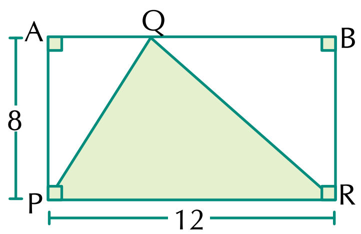
4. Calcule "x", si "O" es centro.



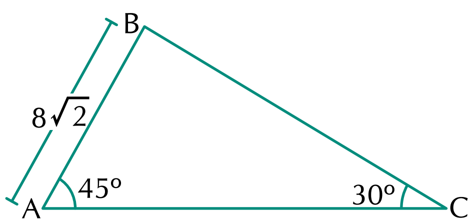
5. Calcule el área del triángulo equilátero EDU.



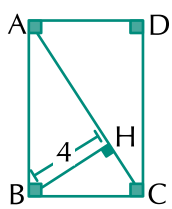
6. Calcule el área del triángulo PQR.



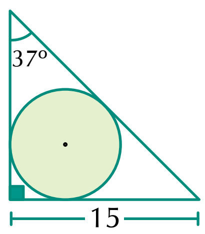
7. Calcule el área del triángulo ABC.



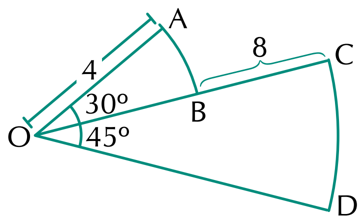
8. Calcule el área del rectángulo ABCD, si: AC = 12.



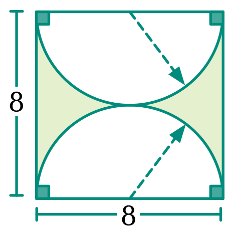
9. Calcule el área del círculo sombreado.



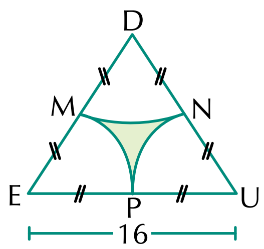
10. Calcule el área del sector "AOB + COD", si "O" es centro.



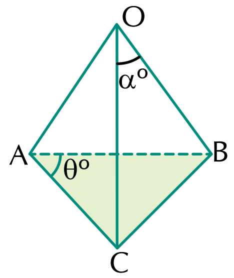
11. Calcule el área sombreada.



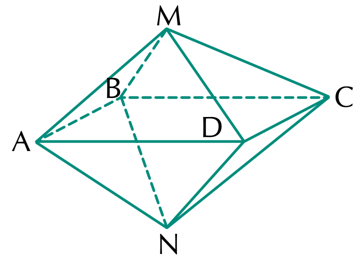
12. Si EDU es un triángulo equilátero, calcule el área de la región sombreada.



13. En el tetraedro regular mostrado, calcule "$\theta + \alpha$".



14. En el octaedro regular mostrado: $BD + AN = 4(\sqrt{2} + 1)$. Calcule el volumen del sólido.



15. En el cubo mostrado: $EC + FC = 3(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Calcule el volumen y el área total del sólido.